INSTITUTO POLITÉCNICO DE BEJA

Escola Superior de Educação de Beja

Curso de Mestrado na Especialidade em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico

A Aprendizagem dos Números Racionais no Ensino Básico
Um estudo no 3º ano do 1º ciclo

Ana Paula Parreira Chainho

Beja 2015

INSTITUTO POLITÉCNICO DE BEJA

Escola Superior de Educação de Beja

Curso de Mestrado na Especialidade em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico

Estudo Final de Mestrado apresentado na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Beja

Elaborado por:

Ana Paula Parreira Chainho - N.º 11964

Orientado por:

Mestre Maria Manuela Duarte de Oliveira e Azevedo

Beja

2015

Agradecimentos

Chegado o final desta árdua etapa, que se prendeu com a concretização do Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico, não posso deixar de referir e agradecer o apoio que me foi facultado ao longo destes anos, a todos os que de alguma forma contribuíram para realização deste meu objetivo, e sem quais não teria sido possível tornar o meu sonho realidade.

Em primeiro lugar, quero agradecer profundamente todo o apoio e compreensão que o meu marido me dedicou ao longo destes anos, foi sem dúvida o meu apoio e por vezes a voz da razão em muitos momentos de desespero e frustração. Por outro lado, não posso deixar de referir a importância que o meu filho teve e tem na minha vida, pois nos momentos mais difíceis, foi nele que pensei, sempre com o objetivo de lhe mostrar que, apesar das dificuldades nunca devemos deixar de lutar pelos nossos objetivos.

Em seguida, quero agradecer e expressar os meus sinceros agradecimentos há minha orientadora, Manuela Azevedo por todo o apoio e incentivo constantes, pelas suas sugestões, pela sua enorme disponibilidade e sobretudo pelo seu lado humano que foi essencial ao longo destes últimos meses de trabalho.

Em seguida, gostaria de agradecer ao profº. José António Espirito Santo, pela sua atenção e disponibilidade que sempre teve comigo enquanto trabalhadora estudante. Agradeço também a todos os docentes, que ao longo do meu percurso académico contribuíram para o meu enriquecimento profissional e pessoal.

Às minhas colegas de turma, por todo o incentivo e partilha de conhecimentos que ao longo deste último semestre foi imprescindível para o término desta etapa.

À profª. Cristina Silva, por todo o apoio e disponibilidade que desde o 1º dia revelou, bem como ao entusiasmo e profissionalismo com os quais se rege no seu dia-a-dia enquanto profissional de educação, sendo sem dúvida um exemplo a seguir.

Não poderia deixar de agradecer à diretora do Agrupamento de Escolas de Ferreira do Alentejo, profª. Antónia Magalhães e ao Presidente do Instituto Politécnico de Beja, Profº. Vito Carioca pela celebração do protocolo que me permitiu realizar a minha Prática de Ensino Supervisionado neste agrupamento, sem o qual não teria sido possível a conclusão deste mestrado.

A todos um enorme Obrigado!

Resumo

O presente trabalho teve como principal objetivo, identificar quais foram as dificuldades dos alunos na aquisição de número racional no 1º ciclo do ensino básico, nomeadamente no que diz respeito ao seu desenvolvimento na forma de fração, à comparação e equivalência de frações e identificar metodologias que desenvolvessem a capacidade de resolução de problemas com números racionais. Para isso trabalhou-se simultaneamente com as várias representações dos números racionais nos diferentes significados, em diferentes contextos e tipos de grandeza, em tarefas de natureza diversa utilizando uma metodologia exploratória com especial atenção à natureza das tarefas e à sua comunicação matemática, querendo assim dar resposta à questão "Quais as representações que os alunos privilegiam na resolução de tarefas com números racionais?".

A metodologia utilizada neste estudo foi a de um estudo de caso, no entanto tratou-se de uma investigação-ação, sobre e para a prática, de natureza qualitativa, na qual foram identificadas as dificuldades dos participantes, elaborou-se uma proposta de plano de ação para colmatar as mesmas e fez-se uma nova análise do nível de conhecimentos dos alunos de forma a verificar se esse plano estava adequado, identificando-se assim as melhorias dos mesmos e lacunas ainda presentes. No entanto, uma vez que este estudo se realizou apenas numa turma específica, os resultados não podem ser generalizados.

Os participantes desta investigação foram dezassete alunos de uma turma de 3º ano do 1º Ciclo do Ensino Básico. A investigação decorreu no ano letivo 2014/2015, na referida turma, onde decorreu a prática de ensino da autora deste estudo.

Palavras-chave: Conceito de número racional; 1º ciclo do Ensino Básico; Matemática; Comparação e equivalência de frações; Estratégias de aprendizagem.

Abstract

The following work had as primary objective the identification of the student's difficulties in acquiring the rational number in the 1st cycle of basic education, namely about the development of the fraction form, the comparison and equivalence of fractions and identifying methods that would develop the capability of resolving problems with rational numbers. For that it was worked simultaneously with the different representations of rational numbers in their different meanings, in different contexts and types of size, on various kinds of tasks using an exploring methodology with special focus to the nature of the tasks and their mathematic communication, so willing answer the question "Which representations do students choose for the resolution of tasks with rational numbers?”.

The methodology used in this study was a case study, however, it was an action-research, about and over the practice, the qualitative nature, because it were identified the participants’ difficulties, it was made a proposal of an action plan to solve these difficulties and it was made a new analysis to students’ level of knowledge so it could be verified if this plan was appropriate, identifying the improvements thereof and still present gaps. However, since this study was realized on only one specific class, the results cannot be generalized.

The participants of this research were seventeen students from a 3rd grade class from the 1st Cycle of the Basic Education. The research took place in the school year 2014/2015, in the specified class, where the education method of the author of this research took place.

Keywords: Rational numbers concept; 1st Cycle of the Basic Education; Mathematics; Comparison and equivalence of fractions; Learning strategies.

Índice

Índice de imagens

Introdução

O presente estudo pretendeu refletir algumas das minhas preocupações enquanto futura profissional de educação sobre a temática "Os números racionais não negativos" no Ensino Básico, pois esta é uma temática em que os alunos revelam grandes dificuldades ao longo da sua aprendizagem.

No âmbito da unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada, incluída no plano de estudos deste curso de Mestrado, foi-nos proposta a realização de uma investigação. Assim, propus-me investigar, na área da Matemática, procurando validar os seguintes objetivos:

- Identificar as representações usadas pelos alunos na aprendizagem dos números racionais.
- Identificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais não negativos.
- Caracterizar metodologias que contribuam para melhorar o ensino e a aprendizagem dos números racionais.

Esta temática surgiu, essencialmente, porque senti a necessidade de aprofundar o meu conhecimento sobre as principais dificuldades que os alunos sentem nas diferentes representações de números racionais, mais concretamente a nível do desenvolvimento do conceito de número racional, frações equivalentes e quais as representações que privilegiam na resolução de problemas (ativas, icónicas ou simbólicas).

A metodologia utilizada neste estudo foi a de um estudo de caso, no entanto trata-se de uma investigação-ação, sobre e para a prática, de natureza qualitativa, pois foram identificadas as dificuldades dos participantes, elaborou-se uma proposta de plano de ação para colmatar as mesmas e fez-se uma nova análise do nível de conhecimentos dos alunos de forma a verificar se esse plano estava apropriado, identificando-se as melhorias dos mesmos e lacunas ainda presentes. No entanto, uma vez que este estudo se realizou apenas numa turma específica, os resultados não podem ser generalizados.

Os participantes desta investigação foram dezassete alunos de uma turma de 3º ano do 1º Ciclo do Ensino Básico. A investigação decorreu no ano letivo 2014/2015, na referida turma, onde decorreu a prática de ensino da autora deste estudo.

Este estudo encontra-se organizado em diversos pontos, começando por uma definição do problema, onde é exposta a delimitação do objeto de estudo/enunciado do problema, assim como a justificação e a sua relevância, bem como a definição de termos, ou seja, as palavras-chave. No seguimento da estrutura, vem a definição de objetivos de investigação. Segue-se a revisão de literatura com especial destaque para o conceito sentido de número racional, Desenvolvimento, Representações e linguagens referentes aos Números Racionais bem como a importância dos materiais didáticos no processo de ensino-aprendizagem. Posteriormente é apresentada a metodologia, onde é referido o tipo de investigação e justificação da sua escolha, assim como as técnicas e instrumentos de pesquisa, caracterização dos participantes. Em seguida, é apresentado o plano de ação e descrito o procedimento. Em seguida são apresentadas as tarefas realizadas na turma do 3º ano, bem como uma descrição da realização destas e ainda algumas resoluções dos alunos. Finalmente são apresentadas as conclusões.

Capítulo I - Enquadramento teórico

A fundamentação teórica deste estudo, sobre os números racionais não negativos baseia-se nas orientações curriculares e respetivas metas de ensino na área da matemática; no desenvolvimento do conceito de número racional tendo como partida tarefas de partilha equitativa com recurso a situações do dia-à-dia (Fosnot &Dolk, 2002; Streffland, 1991); e no conceito de matematização progressiva (Frundenthal, 1991; Gravemeijer, 1994);

1. A Matemática e orientações curriculares para 1º Ciclo

A Matemática é uma das ciências mais antigas e também uma das mais antigas disciplinas escolares, tendo sempre ocupado um lugar de relevo no currículo.

A atividade matemática julga-se ter surgido com a necessidade de contagem e de medição, tendo sido gradualmente alargada ao domínio autónomo ao estudo dos números e operações, das formas geométricas, das estruturas e regularidades, da variação, do acaso e da incerteza.

Dentro das suas principais dimensões, encontram-se a resolução e formulação de problemas, a formulação e teste de conjeturas, a generalização e a demonstração, e a elaboração de modelos.

Ao longo do tempo, a Matemática, como todas as ciências sofreu uma grande evolução nos seus métodos, processos e técnicas, a nível da organização, na sua relação com outras áreas bem como a nível da sua importância no que se refere às suas aplicações. Atualmente está presente em todos os ramos da ciência tecnológica, em diversos campos da arte, é fundamental em muitas profissões e sectores da atividade diariamente.

No entanto, a Matemática é ainda vista como uma ciência que é de difícil compreensão, a maioria das pessoas quando questionadas sobre a perceção que tem da mesma revelam de imediato um sentimento de frustração ou desânimo, referindo que sentiram grandes dificuldades ao longo dos seus percursos escolares.

Nos últimos anos, tem vindo gradualmente a ter um papel cada vez mais destacado no currículo, e por isso, se exige da escola, uma formação sólida nesta área. Esta formação deve desde cedo, permitir aos alunos, compreenderem e utilizarem a Matemática relacionando-a com as diversas disciplinas em que ela é fundamental, mas também após o percurso escolar de cada individuo, a nível das suas profissões e na vida pessoal e em sociedade. Esta formação deve potenciar cidadãos cada vez mais informados e autónomos, capazes de questionar e formar conjeturas nos diversos domínios e relaciona-los com a atual sociedade em que vivem.

Através do atual programa de matemática podemos verificar que, este salienta a importância em desenvolver o gosto por esta ciência através da redescoberta das relações e de factos matemáticos, que devem ser uma das metas no ensino de hoje em dia em vez de serem trabalhados isoladamente como no passado. Para que se conseguiam alcançar estes objetivos os professores devem de uma forma gradual conduzir as aprendizagens dos alunos, para que estas sejam coerentes e consistentes. Para mudar a perceção da sociedade em relação à matemática é necessário e obrigatório que as aprendizagens dos alunos desde o 1º ciclo sejam conduzidas de forma progressiva, assentes no rigor e no raciocínio que é próprio desta ciência, bem como desde cedo é necessário a aplicação de alguns conceitos mais abstratos mas devidamente estruturados na precisão dos resultados.

Relativamente ao pensamento abstrato, é necessário que o professor inicialmente selecione tarefas de cariz exploratório e baseadas em situações do quotidiano, para que os alunos sejam capazes de compreender e explicar oralmente ou por escrito as suas ideias e estratégias, bem como comentarem as afirmações dos colegas e do professor e a colocarem dúvidas, mas também devem ser incentivados a escreverem corretamente as suas respostas, apresentado a explicação adequada ao raciocínio que desenvolveram e apresentado as conclusões de forma clara, utilizando o português corretamente, evitando abreviaturas e símbolos matemáticos.

Através do recente estudo internacional, ***Trends in International Mathematics and Science Study*** (TIMSS), foi revelado que, em particular no 1º ciclo, é necessário que o número de passos necessários na resolução de problemas vá aumentando de ano para ano, pois a análise dos dados referentes a 2011, revelam que 60% dos alunos portugueses do 4º ano não conseguem responder corretamente a questões que não sejam de resposta imediata. Por tudo isto, é urgente estimular os alunos, motivá-los e mostrar que é possível admirar esta área curricular pois esta é fundamental na formação de cidadãos responsáveis.

Assim, como podemos verificar pelo que foi referido anteriormente e também pelo que é destacado no Programa de Matemática (DEB, 2007), que os materiais didáticos assumem um papel importante no currículo, este realçava a sua importância quando, por exemplo, refere que, *"a aprendizagem da Matemática inclui sempre vários recursos. Os alunos devem utilizar materiais manipuláveis na aprendizagem de diversos conceitos, principalmente no 1.º ciclo"* (p. 9).

Ou ainda quando menciona que *"os materiais manipuláveis (estruturados e não estruturados) devem ser utilizados nas situações de aprendizagem em que o seu uso seja facilitador da compreensão dos conceitos e das ideias matemáticas"* (p. 14).

Os materiais didáticos devem ser utilizados no caso dos números racionais não negativos onde a recolha de dados para este trabalho de investigação se centrou, sendo esta explícita num tópico mais adiante.

Relativamente ao novo Programa de Matemática (Ministério da Educação e Ciência, 2013), este refere que, os professores tem a possibilidade de optar pelas metodologias e pelos recursos que mais se adequem em cada situação de aprendizagem, permitindo assim que os alunos atingiam os desempenhos previstos de acordo com as metas curriculares em vigor.

No nosso país existem algumas investigações sobre os materiais didáticos no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, algumas dessas investigações evidenciam, precisamente, a mais-valia que tais materiais trazem para a aula de Matemática, tendo em vista a sua aprendizagem por parte dos alunos, como é o caso de Ribeiro (1995), Vale, I. (2000), Tomás, E. (2004), Botas (2008) e Oliveira *et al* (2012), Contente, I. (2012).

2. Domínio: Números e Operações no Programa 1º Ciclo do Ensino básico

O atual Programa de Matemática estrutura-se ao longo dos diferentes ciclos, em três grandes domínios, no qual consta o tema Números e Operações, que surge ao longo de todos os ciclos e assenta em três ideias fundamentais que são:

- Promover a compreensão dos números e operações,
- Desenvolver o sentido de número;
- Desenvolver a fluência de cálculo.

No que diz respeito ao 1º Ciclo do Ensino Básico, à luz do atual programa pretende-se que os temas em estudo sejam introduzidos de forma progressiva, iniciando-se através de uma abordagem experimental e concreta e progressivamente se passe para uma conceção mais abstrata.

No domínio Números e Operações são evidenciadas as quatro operações sobre os números naturais, cuja extensão se aplica aos números racionais não negativos e que se inicia a partir do 3º ano de escolaridade. Para tal é fundamental que os alunos dominem as estratégias de cálculo mental e tenham destreza na aplicação dos quatro algoritmos.

No que diz respeito aos números racionais, o atual programa refere que:

"As frações são introduzidas geometricamente a partir da decomposição de um segmento de reta em segmentos de igual comprimento e desde logo utilizadas para exprimir medidas de diferentes grandezas, fixadas unidades. O subsequente tratamento das frações, assim

como a construção dos números racionais positivos que elas representam, devem ser efetuados com o possível rigor e de forma cuidadosa, garantindo-se, por exemplo, que os alunos interpretem corretamente as dízimas finitas como uma mera representação de um tipo muito particular de frações, devendo evitar o recurso sistemático às dízimas sempre que pretenderem efetuar cálculos." (*In Programa e Metas Curriculares, 2013, pág.6).*

Assim, a iniciação ao estudo das frações assume um papel essencial no 1º ciclo, é-lhes exigido que compreendam com rigor os conteúdos deste tema.

Termos como "metade", "terça parte", "quarta parte", "quinta parte", "frações" e a representação dos números naturais e das frações numa reta numérica, surgem logo no 2º ano de escolaridade de acordo com o atual programa.

No final do 3º ano, os alunos devem ser capazes de representar frações como medida de comprimento e de outras grandezas; representar frações numa reta numérica; compreender identificar e o conceito de frações equivalentes; adicionar e subtrair frações com o mesmo denominador, entre muitas outras situações. (ver tabela 1 no apêndice I) Esta enorme diversidade de conteúdos que é direcionada a esta faixa etária, preocupa sem dúvida os docentes, pois é exigido aos alunos que desenvolvam um sólido conhecimento relativamente a conteúdos que são considerados de difícil compreensão e para os quais a maioria dos alunos não está devidamente preparada, no entanto é neste ciclo que estes devem ser introduzidos abrangendo as várias representações de número racional (fração, decimais, percentagem e pictóricos) para que os alunos de uma forma gradual vão contactando e em simultâneo vão desenvolvendo os seus esquemas mentais que é próprio da faixa etária onde se encontram, e assim o conceito de numero racional possa ser compreendido de uma forma intuitiva e baseada em situações do seu dia-a-dia, para que ao chegarem ao 2º ciclo estejam ultrapassadas as dificuldades elementares.

3.Sentido de Número Racional e sua aprendizagem

O conjunto dos números racionais resulta da reunião do conjunto dos números inteiros com o conjunto dos números fracionários. O desenvolvimento do sentido de número, relativamente aos números racionais, envolve uma ampliação significativa de conhecimentos, desde logo, porque deixamos de trabalhar com um conjunto discreto para passarmos a trabalhar com um conjunto denso.

Os alunos iniciam o desenvolvimento do sentido de número com os números naturais, que apresentam um carácter discreto. Já os números racionais caracterizam-se pela sua densidade, ou seja, os alunos têm que compreender que entre quaisquer dois números racionais, existe uma infinidade de números racionais, ao contrário do que acontecia com os números naturais, o que, do ponto de vista cognitivo, é substancialmente mais complexo.

Cid, Godino e Batanero (2004, pag.223) afirmam que *"os números racionais são o primeiro conjunto, em que os alunos realizam experiências matemáticas, que não se baseiam no processo de contagem, ou seja, o facto de o conjunto dos números racionais ser um conjunto denso (em que, portanto, dado um qualquer número racional, não é possível determinar quer o seu antecessor, quer o seu sucessor) implica mudanças profundas no raciocínio e nas estratégias de cálculo dos alunos".*

Algumas das dificuldades dos alunos em trabalharem com números racionais decorrem da tendência de transferir para estes números as regras aprendidas nos números inteiros. Salienta-se assim, a importância de trabalhar desde os primeiros anos simultaneamente os números inteiros e os fracionários, de modo a minimizar esta tendência como é comtemplada no atual Programa de Matemática.

Vários estudos foram realizados para tentar perceber qual a idade mais adequada à introdução dos números racionais. Segundo Hunting, Sharpley, Bezuk e Streefland, a introdução dos números racionais deve ser feita nos primeiros anos de escolaridade desde que seja acompanhada de materiais manipulativos.

Cramer e Henry (2002), verificaram também que, os estudantes teriam mais sucesso se os professores, nos primeiros anos de escolaridade, investissem o seu tempo na construção do significado das frações, usando modelos concretos, enfatizando conceitos e usando estratégias informais de ordenação e estimativa.

De acordo com Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999, p.48). "*A ampliação do conceito de número racional é um dos aspectos centrais do desenvolvimento da competência matemática dos alunos ao longo da educação básica*."

Também Kieren dedicou grande parte da sua carreira à investigação sobre o domínio dos números racionais, o seu trabalho contribuiu para um melhor entendimento do comportamento de partilha em crianças pequenas. O investigador gosta de dizer que a matemática é " Sobre algo", mas esta é uma ideia importante que se foi perdendo e que têm conduzido, ao longo dos anos, os alunos a uma abstração prematura e uma preocupação excessiva com os algoritmos (Post et al, 1998).

4. Resolução de problemas, representações e linguagens referentes aos Números Racionais

A resolução de problemas é um tema que é transversal ao longo do atual programa de matemática. Este refere claramente que os diferentes conteúdos devem ser introduzidos gradualmente e de forma crescente, devendo ser apresentados a partir de abordagens mais experimentais e seguidamente evoluir para outras mais abstratas. Logo é fundamental que desde o 1º ciclo os alunos sejam capazes de utilizarem e exteriorizarem algumas características próprias deste tópico, como o devido rigor científico, para tal é necessário que sejam capazes de discutir e justificar um problema através das diferentes opções que tomaram perante cada situação exposta.

Segundo Pólya (2003), a resolução de problemas matemáticos desenvolve-se seguindo um percurso que é composto por várias etapas, em que cada uma delas envolve processos cognitivos diferenciados, como se pode verificar através dos dados apresentados na tabela 2.

Tab. 2 - Resolução de problemas Pólya(2003)

Etapas	**Processos cognitivos**
Compreensão do problema	Identificar os dados e as condições da situação; Clarificar termos e expressões; Fazer e responder as questões sobre o problema de forma a precisar o que se pretende;
Elaboração de um plano	Estabelecer conexões com problemas já resolvidos, identificar semelhanças e diferenças; Organizar a informação relevante para a resolução de um problema; Procurar e avaliar várias estratégias e selecionar a que se afigura mais adequada e eficaz;
Execução do plano	Implementar a estratégia selecionada e tentar resolver o problema;
Avaliação	Rever e avaliar a razoabilidade e adequação da solução ao contexto e procurar estratégias alternativas de resolver o problema;

(Tenreiro-Vieira, p.19)

Este autor defende que o aluno na 1ª etapa, antes de mais tem de entender o problema e registar os dados apresentados no problema, de seguida na 2ª etapa deve pensar numa hipótese para a sua resolução, ou seja, tem de identificar um plano, onde englobe o que pretende saber, na 3ª etapa deve executar o plano que traçou anteriormente e na 4ª etapa deve verificar e interpretar o resultado obtido.

Outros autores também demonstraram e testaram as suas opiniões no que diz respeito às estratégias para a resolução de problemas, como é o caso de Vale e Pimentel (2004, p. 24):

“ Fazem referência ao descobrir um padrão/descobrir uma regra ou lei de formação, estratégia que se centra em certos passos do problema e a solução é encontrada por generalizações de soluções específicas; à realização de tentativas e conjeturas onde a estratégia profetisa a solução; ao trabalhar do fim para o princípio; ao uso da dedução lógica/ fazer eliminando estratégias que não são possíveis; ao reduzir a um problema mais simples/ decomposição/simplificação; ao compor uma simulação, fazendo uma experimentação ou dramatização utilizando objetos que traduza o problema a ser resolvido, e à realização de um desenho, diagrama, gráfico ou esquema como estratégia de resolução de problemas.”

Este tipo de estratégias podem ser utilizadas isoladamente ou utilizadas várias em simultâneo, ou simplesmente utilizar um conjunto com recurso a diversas representações (desenho, diagrama, esquema, gráfico, ou tabela).

Entende-se por representação, uma forma de sinais, carateres, ícones ou objetos que podem, de alguma forma, designar ou substituir alguma coisa, e como para representar um número é necessário atribuir-lhe uma significação, no entanto um número pode ter várias designações, como por exemplo, um número racional pode ser representado por um numeral decimal, uma fração, uma percentagem, um ponto na reta numérica ou através de linguagens natural ou pictórica. Logo é essencial que os alunos aprendam a trabalhar com cada uma destas representações e também a estabelecer relações entre elas.

Segundo o NCTM (2007):

“Os alunos necessitam de desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjeturas […] Estas representações funcionam como ferramentas para raciocinar e resolver problemas ajudando, igualmente, os alunos, a comunicarem o seu raciocínio a terceiros (p. 240).”

Através do estudo *Rational Number Project,* Post, Cramer, Berh, Lesh e Harel (1993), referem que a compreensão de um número racional está relacionada com flexibilidade na conversão entre diferentes representações, nas transformações dentro de cada representação e na independência das representações concretas. Defendem, ainda, que os alunos com pouca experiência na utilização e na conversão entre as diferentes representações tem grandes dificuldades na abstração de informações das representações concretas, na realização de conversão e nas operações com símbolos matemáticos.

Estes autores sugerem que a compreensão dos números racionais está relacionada com três aspetos:

- Flexibilidade na conversão entre diferentes representações;
- Flexibilidade nas transformações dentro de cada representação;
- Independência progressiva de representações pictóricas e de materiais manipuláveis;

Através deste projeto foi desenvolvido um modelo de ensino baseado na conversão dentro e entre as diferentes representações, para isso é necessário que os alunos desenvolvam uma compreensão profunda que só é alcançada através da experiência que gradualmente vai aumentando através da resolução de tarefas onde utilizem as diferentes representações e conversões. É através do processo de reinterpretação de ideias e conceitos requerida pelas conversões que os alunos adquirem novos conhecimentos e reforçam os conhecimentos anteriores, alcançando uma compreensão mais ampla e profunda das ideias matemáticas.

No Programa de Matemática de 2004, a primeira representação de número racional trabalhada era o número decimal. No entanto, os alunos apresentavam diversas dificuldades na compreensão desta representação que, segundo Owens (1993), se deve ao facto de se ensinar a trabalhar com numerais decimais antes dos alunos compreenderem o próprio sistema de numeração decimal. Este autor defende que a representação em numeral decimal e em fração deveriam ser trabalhadas em simultâneo, para que o aluno percebesse que as duas traduzem a mesma situação e pertencem ao mesmo conjunto numérico.

No que diz respeito à representação verbal, Streefland (1991) menciona que é importante que as frações sejam trabalhadas a partir dos seus nomes (metade, um terço, um quarto, etc.). Geralmente, os alunos começam por resolver questões usando uma mistura de representações verbais e pictóricas, nomeadamente desenhos ou esquemas, que servem de base a estratégias que permitem a ligação entre a interpretação da informação do enunciado e a respetiva solução.

As representações podem ser convencionais e não convencionais, mas a existência de mais do que um tipo de representações é essencial para que possa haver comunicação e compreensão.

Por sua vez, é através da comunicação que se negoceiam representações. Existem várias formas de representar ideias matemáticas, como descritas anteriormente: as representações ativas, as representações icónicas e as representações simbólicas (Bruner, 1999).

As representações ativas estão associadas à ação, ou seja, estão ligadas à manipulação de objetos, sejam eles de uso corrente ou especialmente realizados como material didático. A importância deste modo de representação decorre do pressuposto de que o conhecimento surge através da ação. Assim, a manipulação direta e adequada de objetos, sejam eles de uso corrente ou especialmente concebidos como material didático, e a simulação de situações, propiciam oportunidades para criar modelos ilustrativos, contribuindo para a construção de conceitos.

As representações icónicas baseiam-se na organização visual, no uso de figuras, imagens, esquemas, diagramas, ou desenhos para ilustrar conceitos, procedimentos ou relações entre eles.

Por último as representações simbólicas consistem na tradução da experiência em termos da linguagem simbólica. Não correspondem apenas aos símbolos que representam ideias matemáticas, como também a todas as linguagens que envolvem um conjunto de regras fundamentais quer para o trabalho com a Matemática, quer para a sua compreensão.

Estas diferentes possibilidades de representação não devem ser entendidas como autónomas, independentes ou alternativas umas às outras. Na verdade, podem ser usadas simultaneamente ou segundo várias combinações que surjam ao longo de toda a vida.

Isso pode ser útil para orientar o trabalho do professor, na medida em que este deve decidir se, e quando, usa ou incentiva os alunos a usar cada um dos diferentes modos de representação.

Segundo Bruner (1999, citado por Pinto e Canavarro, 2012, p.4*),"Estes três sistemas de representação operam durante o desenvolvimento da inteligência humana e a interação entre os diferentes sistemas é crucial para o desenvolvimento de cada pessoa."*

Para que isto seja possível, é necessário que se domine, de forma progressiva, cada uma destas representações. E para que isso aconteça, os alunos devem ser motivados a utilizar não só "esquemas, diagramas, tabelas ou outras representações" mas também devem ser incentivados progressivamente a utilizar métodos mais formais que se depreendem com as representações simbólicas. Pode-se concluir que as representações matemáticas são uma ótima base de aprendizagem para os alunos e na maioria dos casos a forma que mais privilegiam para interpretar e resolver tarefas/problemas, no entanto com o passar do tempo, devem ser capazes de utilizar cada vez mais as representações simbólicas e icónicas em detrimento das representações ativas.

De forma a se perceber melhor as representações matemáticas, Boavida et al. (2008, p.72) apresenta o seguinte esquema (imagem N.º 1):

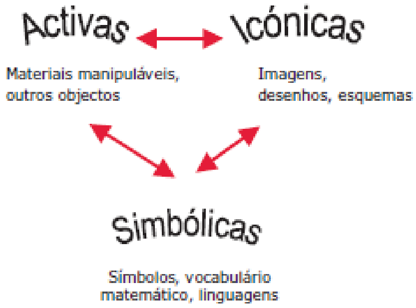


Imagem N.º 1 - Representações Matemáticas segundo Boavida

Neste estudo, tendo em conta a faixa etária dos alunos e as dificuldades reveladas pelos mesmos no que diz respeito à compreensão dos números racionais, sendo que esta foi comprovada em vários estudos científicos, e também através dos resultados obtidos no teste de avaliação diagnóstica realizado para esse efeito, foram assim abordadas mais detalhadamente dois tipos de representações icónicas, o desenho e os símbolos não convencionais (representativos do real).

No desenho a criança encontra um valioso recurso para comunicar e expressar os seus sentimentos, vontades e ideias. No contexto das representações matemáticas, segundo Smole e Diniz (2001), o desenho serve como recurso de interpretação do problema e como registo da estratégia de solução.

Segundo Cavalcanti (2001), o desenho pode ser utilizado pelas crianças na resolução de problemas de três maneiras diferentes:

- Para representar aspetos sem expressar relações que identifiquem as transformações numéricas;
- Para representar a resolução completa do problema utilizando apenas o desenho;
- O aluno mistura o desenho e símbolos matemáticos;

Inicialmente os alunos representam aspetos do seu quotidiano utilizando o desenho, gradualmente conseguem resolver problemas apenas através do desenho e numa fase mais avançada, utilizam o desenho e símbolos matemáticos na resolução de problemas, até que finalmente, conseguem a sua resolução de uma forma abstrata e utilizam uma linguagem puramente matemática.

5. Metodologias facilitadoras da aprendizagem dos números racionais

Nas aulas de matemática bem como nas de outras disciplinas, é necessário encontrar métodos de ensino motivadores e eficazes para os alunos. Focando-nos no ensino da Matemática, no 1º CEB, podemos encontrar, no Programa de Matemática, diversos tópicos, desde os Números e Operações, à Geometria e Medida, e à Organização e Tratamento de Dados. Cada tópico destes engloba diversos conteúdos e, em cada um deles é possível utilizar materiais didáticos de diferentes naturezas.

Relativamente aos Números e Operações, restringindo-nos aos números racionais não negativos (foco principal nesta investigação), podemos utilizar os materiais didáticos com diversas finalidades, isto é, por exemplo, para explorar as diferentes representações do número racional não negativo. Os contextos reais, como a dobragem de folhas ou a divisão de uma tablete de chocolate, têm significado para os alunos, sendo que é algo com que lidam diariamente. Desta forma, quando deparados com tais contextos, podem interiorizar mais facilmente os conteúdos que lhes vão sendo ensinados, uma vez que é algo que os alunos têm de um modo informal consciente, graças às suas experiências pessoais, e que vão, progressivamente, formalizando, de acordo com as novas aprendizagens.

Algumas das dificuldades, que os alunos demonstram possuir na representação dos números racionais, prendem-se com o facto de considerarem, por exemplo, uma fração maior que a outra, precisamente porque uma tem o denominador maior que a outra. Outras vezes consideram que, por exemplo, $\frac{1}{2}$ é o mesmo que 1,2, não estando as representações relacionadas com os números que representam (Monteiro & Pinto, 2007, cit. por Quaresma & Ponte, 2012).

A utilização de materiais didáticos pode auxiliar na compreensão destes conceitos, contribuindo no entendimento das frações com o significado parte-todo, bem como na reconstrução da unidade a partir das suas partes ou mesmo na identificação de frações equivalentes. Ou seja, é importante que as crianças percebam que, numa fração, esta representa uma parte da unidade (significado parte-todo), que consigam reconstruir a unidade a partir de diversas partes e, que se apercebam da existência de frações que representam a mesma parte em relação à unidade, compreendendo-as (frações equivalentes). Não se trata apenas de informações abstratas, mas sim de concretizações e presença de contextos reais, em que os próprios alunos investigam, discutem entre si e chegam a conclusões por si mesmos, estando assim diretamente envolvidos com os conteúdos em questão, não podendo existir medo, mas sim liberdade para errar e tentar de novo.

Segundo Gravemeijer (2005), os alunos ao introduzirem novas representações nas suas resoluções, não quer dizer que deixem de utilizar as anteriores, pelo contrário, devem é desenvolverem competências que lhes permitam selecionar as que são mais adequadas em cada contexto específico ou problema. Devendo o professor selecionar os problemas propostos tendo em atenção a sua evolução e criando contextos que tenham significado para os alunos.

Também o atual programa de matemática dá indicações neste mesmo sentido, os alunos devem ser capazes de selecionar a representação que mais se adequa perante cada questão apresentada, para isso é necessário contactarem com diferentes atividades para desenvolverem estratégias pessoais de resolução.

Assim, a exploração de tarefas é essencial, pois permite que os alunos em pequenos grupos ou individualmente, explorem diversas estratégias e materiais que lhes facilitarão a resolução das mesmas e a compreensão de alguns conceitos que por vezes seriam difíceis ou quase impossíveis devido à própria estrutura mental que os alunos apresentam nesta idade faixa etária.

Neste sentido e segundo a teoria de Desenvolvimento Humano de Jean Piaget, as crianças com 8/9 anos de idade encontram-se no estádio das operações concretas.

Neste estádio as crianças começam a ultrapassar o egocentrismo que é característico do estádio anterior.

É através dos conhecimentos que provém das experiências físicas e concretas que as crianças vão conceptualizando e criando estruturas lógicas, mas não tem neste estádio ainda capacidade de recorrer à abstração, ou seja, é necessário a interiorização através da ação para o conhecimento se processar.

Segundo Ponte, Oliveira, (2005) a exploração de tarefas, deve privilegiar o trabalho em grupo ou em pares, esta metodologia permite aos alunos uma maior oportunidade de partilha e negociação de estratégias, pois ao trabalharem em conjunto os alunos tem oportunidade de manipularem e trocarem informações bem como significados matemáticos que contribuem para a construção efetiva de novos conhecimentos.

Para a realização de tarefas de natureza exploratória é normalmente facultado aos alunos alguns materiais didáticos, estes podem ser distinguidos entre materiais estruturados e não estruturados.

Entende-se que material estruturado é, aquele que foi construído com o objetivo de ajudar no ensino e aprendizagem, isto é, materiais que foram concebidos para alguma finalidade educativa, para que os alunos os possam tocar, manipular, tendo em si propriedades que ajudam na construção e compreensão de determinados conceitos, neste caso, matemáticos.

Estes materiais trazem benefícios para as crianças em contexto sala de aula, já que podem estar elas próprias a mexer, a tocar e fazer descobertas por si mesmas, estando assim a partir do que é concreto para o que é abstrato, podendo assimilar igualmente o novo conceito como outro que já lhes é vulgar.

Perante estes materiais, o professor deve deixar que os alunos os experimentem, primeiramente, que os explorem espontaneamente, quase que brincando com o material, misturando o lado lúdico com o lado educativo/mais formal.

Para Alves & Morais (2006, pág. 339) o material deve ser *"oferecido às crianças antes das explicações teóricas e do trabalho com lápis e papel. É preciso que os alunos tenham tempo e liberdade para explorar o material, brincar um pouco com ele, fazer descobertas sobre a sua estrutura e organização".*

Entende-se que material não estruturado, é aquele que pode ser construído pelo professor, pais ou mesmo pelos alunos, é um material com múltiplas funcionalidades, não foi concebido propriamente para ensino e aprendizagem de algo, pode adquirir-se, por exemplo, de simples objetos do quotidiano ou de casa, como pedras, folhas de papel, caixas, rolhas, entre muitos outros. Pode ser considerado como algo a que alguém recorre para determinada finalidade didática, transformando e adaptando para uso em estratégias matemáticas em contexto sala de aula. Os próprios alunos podem ver em algum objeto da sala de aula ou do seu próprio material escolar, algo que lhes possa auxiliar para a resolução de determinada tarefa ou na compreensão de determinado conceito, podendo assim compreender o que podia estar a ser difícil de interiorizar.

Neste estudo, especificamente, foram utilizadas as barras de *Cuisinaire* (material estruturado) e as tiras de papel (material não estruturado). O papel é algo com que os alunos estão habituados a lidar no seu dia-à- dia, no entanto, não as utilizam para aprender uma área curricular em particular, nem para auxiliar na construção do conceito de números racionais. Assim como as tiras de papel, outros materiais podiam ter sido utilizados como materiais não estruturados, como por exemplo: *tabletes de chocolate* (tendo em conta a divisão dos quadradinhos), entre outros.

Capítulo II - Estudo Empírico

1. Objetivos do estudo e sua justificação

O presente estudo foi desenvolvido no 3º ano do Ensino Básico, onde simultaneamente foi realizada a minha Prática de Ensino Supervisionada. Com este estudo pretendeu-se principalmente perceber "Como é que os alunos adquirem o conceito de número racional, que dificuldades apresentam ao trabalhar este conceito e que metodologias potenciam esta aprendizagem?". Neste sentido, foram definidos os seguintes objetivos:

- Identificar as representações usadas pelos alunos na aprendizagem dos números racionais.
- Identificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais não negativos.
- Caracterizar metodologias que contribuam para melhorar o ensino e a aprendizagem dos números racionais.

Esta temática emergiu após a verificação e análise dos conteúdos que constavam na planificação anual da turma referentes à área da matemática, onde se realizou a Prática de Ensino Supervisionado.

Após algumas pesquisas bibliográficas sobre o tema, verificou-se o que já tinha sido percecionado, as dificuldades, que quer alunos quer professores sentem neste domínio. Assim, a minha curiosidade e sentimento de dever enquanto docente, levaram-me a procurar entender e perceber o porquê de se verificarem efetivamente fracos resultados neste domínio, com o objetivo de durante a minha Prática de Ensino Supervisionado, desenvolver um trabalho que fosse facilitador quer para os alunos como também para os docentes e permitisse efetivamente acrescentar algo às aprendizagens nesta temática.

2. Modelo de Investigação

Na realização deste estudo, foi utilizada uma metodologia de investigação ação de natureza qualitativa que ocorreu em simultâneo à Prática de Ensino Supervisionado da investigadora.

Com este estudo pretendeu-se adquirir um conhecimento mais profundo sobre a aquisição do sentido de número racional não negativo numa turma de 3º ano de escolaridade, com a intenção de adequar e melhorar a ação pedagógica da investigadora de forma a facilitar as aprendizagens dos alunos.

Segundo kemmis e Mc Taggart, (1988; pág. 9) *"A investigação acção constitui uma forma de questionamento reflexivo e coletivo de situações sociais, realizado pelos participantes, com vista a melhorar a racionalidade e a justiça das suas próprias práticas sociais ou educacionais bem como a compreensão dessas práticas e as situações nas quais aquelas práticas são desenvolvidas; trata-se de investigação-acção quando a investigação é colaborativa, por isso é importante reconhecer que a investigação-acção é desenvolvida através da acção (analisada criticamente) dos membros do grupo".*

Neste caso, avaliou-se o nível dos alunos no que respeita à aquisição do conceito de número racional não negativo, de forma a verificar se existiu evolução nesta capacidade antes, durante e após a implementação do plano de ação.

Assim e com base nas informações que foram recolhidas na fase inicial, foi elaborado um plano de ação que visou melhorar o desempenho dos alunos na resolução de tarefas com os números racionais não negativos.

Depois da implementação do plano de ação, avaliaram-se novamente os resultados dos trabalhos dos alunos, de forma a concluir se o referido plano teve ou não influência nas suas capacidades de aprendizagem mais concretamente no domínio das frações.

De seguida, foram apresentados novas tarefas para verificar se os participantes retiveram o que aprenderam com o plano de ação, sendo estas novamente analisadas.

No entanto, uma vez que o estudo se limitou a um grupo específico de alunos do 3º ano do 1º Ciclo do Ensino Básico, as conclusões e resultados obtidos não se podem estender à população em geral, tendo assim e por esse motivo, características da metodologia de um estudo de caso.

Como já foi referido, este estudo enquadra-se no paradigma qualitativo porque, *"foca um modelo fenomenológico no qual a realidade é enraizada nas perceções dos sujeitos; o objetivo é compreender e encontrar significados através de narrativas verbais e de observações em vez de através de números"* (Bento, 2012,p.1).

O investigador procura recolher sempre o maior número de dados, de forma a depois descrevê-los com detalhe, sendo que, o ambiente natural é a fonte direta de dados na investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994). Uma vez que a metodologia seguiu uma abordagem qualitativa, os dados recolhidos são, essencialmente, descritivos e, existe uma maior preocupação com o processo do que com o produto final. Ainda para os mesmos autores, o investigador centra a sua atenção nos significados, captando a perspetiva dos participantes e percebendo, assim, o que os sujeitos pensam. Para os mesmos autores, a investigação qualitativa *"é um termo genérico* *que agrupa diversas estratégias de investigação que partilham determinadas características"* (Bogdan & Biklen, 1994, pag.16).

Estes autores afirmam que uma das características deste tipo de investigação é o facto de os dados recolhidos se apresentarem sob forma descritiva e não numérica, como mencionado acima e, também o facto de o investigador se preocupar mais com o processo do que propriamente com os resultados que irá obter. Na investigação qualitativa os dados são analisados de forma indutiva e à medida que estes são recolhidos.

Segundo Fernandes (1991, pag.3), o foco da investigação qualitativa *"é a compreensão mais profunda dos problemas, é investigar o que está 'por trás' de certos comportamentos, atitudes ou convicções. Não há, em geral, qualquer preocupação com a dimensão das amostras nem com a generalização de resultados".*

A opção por uma investigação de cariz qualitativo deveu-se ao facto de esta ser a mais adequada para recolher a informação de forma a responder à questão inicial, devido às suas características, como por exemplo a flexibilidade que esta nos fornece.

A investigação qualitativa pode distinguir-se da investigação quantitativa pela *"natureza flexível de todo o processo de pesquisa, e a escolha contínua das técnicas e estratégias de recolha e análise de dados"* (Vieira, 1995, p.81).

É a situação natural que constitui, na investigação qualitativa, a fonte dos dados, prevalecendo uma recolha de dados, essencialmente por notas de campo, as próprias palavras das pessoas, entre outros.

3.Participantes

Dada a natureza do presente estudo ser de investigação-ação e ter ocorrido apenas numa turma, a técnica de amostragem é de caracter não probabilística por conveniência, pois tratou-se de uma investigação que foi realizada durante a prática profissional da autora, que atuou como professora e como Investigadora e os alunos incluídos na amostra eram os que estavam totalmente disponíveis nos momentos de recolha de dados (Hall, 2007).

Esta investigação contou com a participação da professora titular da turma, para podermos averiguar a sua perspetiva em relação às dificuldades que os alunos geralmente revelam na aquisição do número racional e as estratégias que mais privilegiam na resolução de tarefas sobre esta temática.

Participaram ainda os 17 alunos do 3º ano do Ensino Básico. A referida turma era constituída por 20 alunos, com idades compreendidas entre os 8 e os 14 anos, sendo 11 alunos do sexo masculino e 9 do sexo feminino, assim 3 alunos do sexo masculino não participaram neste estudo, devido a serem alunos com necessidades educativas especiais diagnosticadas, e tinham aulas com professores do ensino especial que coincidiam com os momentos de recolha de dados para o estudo. Por este motivo, a amostra foi composta por 9 alunos do sexo masculino e 8 do sexo feminino (ver anexo 3).

4.Técnicas e Instrumentos de pesquisa para recolha de dados

A recolha de dados decorreu no período da prática profissional, durante o ano letivo de 2014/15. Esta investigação foi iniciada durante a própria prática, e foi crucial no momento da recolha assumir o papel de professora – investigadora.

Obtiveram-se assim dados diversificados, e provenientes de diversas fontes para facilitar a triangulação de informação, como Yin (1993) defende, o investigador sentir-se-á mais confiante em fazer uma determinada afirmação sobre o seu estudo, se este mostrar que a informação oriunda de diversas fontes detém o mesmo objetivo.

Como tal, a recolha de dados para o estudo em questão foi realizada a partir de diferentes fontes de informação tais como: a observação do grupo perante o ensino e aprendizagem da Matemática, de uma entrevista semiestruturada à docente (apêndice II) e de um teste diagnóstico (apêndice VI), em seguida e após a análise aos diversos tipos de informação recolhida foi adaptada uma cadeia de tarefas (Apêndices, XI,XII,XIII, XIV e anexo 3) que foi implementada ao longo de diversas sessões, bem como através dos registos escritos e das observações diretas do trabalho realizado com os alunos e de conversas informais com a professora titular que ocorreram durante e após a realização das tarefas.

Nesta investigação, a observação dos alunos e do trabalho realizado por eles, constituiu uma técnica de recolha de dados importante e presente no dia-à-dia das tarefas realizadas em contexto sala de aula.

Através da observação direta foi possível, obter informações de caracter mais pessoal nomeadamente, o nível da sua autonomia, o interesse pelas aprendizagens escolares, assim como o seu aproveitamento escolar.

A partir da observação também se obtiveram dados relativamente às atitudes e reações dos alunos face aos desafios que lhe foram propostos ao longo desta investigação, no que diz respeito a sua motivação, persistência, capacidade de questionar e resolver novos desafios.

Também se observou informação útil no que diz respeito às capacidades destes alunos nos domínios da resolução de problemas, do raciocínio matemático e da comunicação matemática, consideradas *" três grandes capacidades transversais a toda a aprendizagem da Matemática"* (Ponte *et al.*,2007, p. 8).

Para a estratégia da observação foi importante no momento registar todos os dados recolhidos. O registo das observações realizou-se através de fotografias à resolução das tarefas e a análise dos documentos dos alunos sobre as representações e estratégias utilizadas na resolução das tarefas apresentadas.

Tendo em conta os objetivos deste estudo considerou-se pertinente, ainda recorrer à técnica da entrevista.

Segundo Bogdan e Biklen (1994, p.134) *"a entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspetos do mundo".*

Também para o autor Gil (1999, p.117) a entrevista é uma *"técnica em que o investigador se apresenta frente ao entrevistado, lhe fórmula perguntas com o objetivo de obtenção de dados que interessam à investigação. A entrevista é, portanto, uma forma de interação social. Mais especificamente, é uma forma de diálogo assimétrico, em que parte quer recolher dados e a outra apresenta-se como fonte de informação".*

Como já foi referido anteriormente, nesta investigação foi realizada uma entrevista semiestruturada à docente da turma. Pois, este tipo de entrevistas caracterizam-se por, contemplarem um guião previamente elaborado com as questões a serem formuladas. Contudo, as questões não têm obrigatoriamente que ser colocadas por uma ordem predefinida, uma vez que o guião é apenas um apoio para garantir a abordagem de todos os temas relevantes e a exposição de todos os entrevistados aos mesmos tópicos.

Deste modo, o entrevistador deverá explicar as suas questões adequando-as ao contexto da entrevista, tanto no momento em que as coloca, como às palavras que elege para utilizar.

A utilização de perguntas abertas neste tipo de entrevista permite aos entrevistados expressarem exatamente o que pensam, através das suas próprias palavras, pois "*o entrevistador possui um referencial de perguntas-guia, suficientemente abertas, que serão lançadas à medida* *do desenrolar da conversa, não necessariamente pela ordem estabelecida no guião, mas antes à medida da oportunidade"* (Pardal e Correia, 1995, p.65).

A entrevista foi realizada pessoalmente, tendo sido marcado previamente o dia e hora para a sua realização. Antes da entrevista foi explicado à docente o tema, os objetivos e as condições para a realização do estudo.

Para o registo da entrevista realizada, utilizou-se a gravação em áudio para evitar a perda de quaisquer dados relevantes. A entrevista foi transcrita na íntegra, a partir dos registos obtidos na gravação áudio (Apêndice IV). O guião da entrevista foi elaborado com base nos objetivos definidos para este estudo e com base em dados da literatura, tendo como objetivos específicos os que constam na respetiva tabela (Apêndice III).

5.Tratamento de dados

Tendo em conta a natureza e as questões deste estudo, o tratamento de dados foi essencialmente o da análise de conteúdo bem como a análise ao conteúdo dos registos escritos, dos raciocínios usados e as estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução de tarefas, de modo a identificar as representações e as dificuldades demonstradas pelos alunos na aprendizagem dos números racionais e a caracterizar metodologias que contribuam para melhorar o ensino e a aprendizagem dos números racionais.

De acordo com Quivy e Campenhoudt (1998, p.226), a análise de conteúdo é uma ótima forma de se interpretar informações sem que o investigador "tome como referência os seus próprios valores e representações".

Estes autores defendem igualmente que a análise de conteúdo implica processos técnicos relativamente precisos, sendo essencialmente adequada para o tratamento de entrevistas pouco diretivas. Com este tipo de tratamento, os dados qualitativos são analisados de forma pormenorizada, adequando-se aos instrumentos de recolha de dados que se pretende utilizar neste estudo.

Finalmente as respostas dos alunos foram registadas, nas folhas de tarefas destinadas para o efeito. Depois de registadas as suas resoluções, estas foram organizadas e guardadas em suporte digital.

6.Procedimentos

Com o objetivo de dar resposta às questões definidas para este estudo e se atingissem os objetivos anteriormente definidos, esta investigação foi composta por várias fases, como se pode verificar através do Plano de Investigação-Ação, apresentado na tabela N.º 3:

Plano Investigação-Ação			
1ªFase- Análise de Necessidades	**2ª Fase- Plano Ação**	**3ª Fase- Análise dos trabalhos dos alunos**	**4ª Fase- Avaliação Global**
• Entrevista à professora • T.A.D • Registos observações alunos • Análise dos resultados pessoais alunos	**Seleção e adaptação da cadeia de tarefas e metodologias** 1ª Sessão- "Desenhos" 2ªsessão-"Sanduiche" 3ª Sessão- "Tiras e dobras" 4ª Sessão- "Frações equivalentes" • Implementação das tarefas	Análise dos resultados obtidos em cada uma das sessões.	-5ª Sessão- T.A.D. -Análise global dos resultados ao longo da cadeia de tarefas. - Conclusão do estudo

Tab. N.º 3 - Etapas Plano Investigação-Ação

Na primeira fase desta investigação, foi efetuada a pesquisa e recolha de informação bibliográfica e definição da problemática. Também foi realizada uma entrevista semiestruturada à docente titular da turma, com o objetivo de identificar e caracterizar as principais dificuldades sentidas pelos alunos relativamente à aprendizagem dos Números Racionais no 1º Ciclo, quais as metodologias facilitadoras dessas aprendizagens e que representações utilizam os alunos nas tarefas com os Números Racionais.

Nesta mesma fase, foi ainda realizada a análise de dados recolhidos na entrevista realizada à docente da turma e também a análise do teste de avaliação diagnóstica realizado aos alunos com o objetivo de identificar os seus conhecimentos sobre a temática. Esta análise foi feita com base nos registos escritos da observação participante durante e após a realização do T.A.D., das intervenções espontâneas dos alunos durante a resolução da referida avaliação e nos momentos de correção da mesma.

Em seguida, na segunda fase, foi elaborado o plano de ação que visou a seleção de uma cadeia de tarefas para que os alunos ultrapassassem as dificuldades anteriormente manifestadas. Para tal, foram identificadas estratégias de ensino que permitissem, depois de a sua aplicação colmatar as dificuldades dos alunos. Neste momento foi feito o cruzamento de dados, entre aquilo que a docente afirmou na entrevista que deu à investigadora e na literatura selecionada para a fundamentação deste estudo. Depois do plano de ação ter sido realizado, procedeu-se à sua implementação. Neste momento, foram ainda aplicadas a cadeia de tarefas anteriormente definidas, sendo algumas delas de cariz exploratório, onde se pretendeu que os alunos desenvolvessem atitudes que conduzissem ao desenvolvimento de número racional e à noção de frações equivalentes.

No terceiro momento, foram analisados os resultados obtidos pelos alunos nas tarefas anteriormente apresentadas em cada uma das sessões. Esta análise foi feita à semelhança do que foi descrito na primeira fase.

Na última fase, foi realizada uma análise global às aprendizagens efetuadas pelos alunos de modo a confirmar se o plano de ação teve ou não impacto no desenvolvimento dos alunos relativamente à aprendizagem dos Números Racionais. Chegada a esta última fase e com base em todas as informações até aqui recolhidas, elaborou-se a conclusão deste estudo, identificando-se assim o porquê dos objetivos definidos inicialmente para este estudo terem sido atingidos.

Capítulo III- Análise e interpretação dos dados

1. Descrição do processo

Neste capítulo estão apresentados e discutidos os principais resultados deste estudo, tendo em conta as diversas fases do plano de ação. Procurou-se analisar e refletir sobre quais são as dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais no 3º ano do 1º ciclo e caracterizar metodologias potenciadoras dessas aprendizagens tendo em vista esta problemática definiram-se os seguintes objetivos, aos quais se procurou dar resposta:

- Identificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito de número racional não negativo.
- Identificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem de frações equivalentes.
- Caracterizar as metodologias que contribuam para o ensino-aprendizagem dos números racionais.

De forma a dar respostas a estes objetivos foram produzidos e analisados os documentos obtidos em cada uma das etapas:

Inicialmente foi produzido o guião de entrevista dirigida à docente (Apêndice II), em seguida foi realizada a entrevista semiestruturada à professora e a respetiva análise de conteúdo (Apêndice V).

Com base nas suas respostas e na literatura consultada foi criado um Teste de Avaliação Diagnóstico (Apêndice VI) para que fosse possível verificar o nível de conhecimentos dos alunos, em seguida procedeu-se à sua avaliação. Através da análise dos resultados obtidos pelos alunos no T.A.D. foi em seguida selecionada e adaptada uma cadeia de tarefas da Brochura "Desenvolvendo o Sentido de Número Racional "que foram implementadas ao longo de cinco sessões.

A 1ª sessão foi realizada com o intuito de perceber qual o interesse e a motivação demonstrados pelos alunos perante as tarefas relacionadas com os Números Racionais para verificar se as tarefas selecionadas para as sessões seguintes se adequavam com coerência ao grupo de alunos. A maior parte das tarefas planificadas para este estudo envolveram a manipulação de materiais didáticos não estruturados e estruturados. Por último, foi realizada uma cadeia de tarefas com base em problemas matemáticos envolvendo os números racionais, com o objetivo de verificar se houve ou não alterações nos resultados. Durante as sessões todos os alunos tiveram acesso e usufruíram do material necessário para a realização das tarefas propostas, na maioria das vezes de forma individual e outras vezes a pares ou em pequenos grupos.

2. Identificação das dificuldades

2.1 Resultados da entrevista realizada à docente

Na fase inicial deste estudo, com o já foi referido anteriormente, foi feita uma entrevista semiestruturada à docente da turma. Assim sendo, esta ajudou a preparar o presente estudo, através do qual pretendeu-se dar resposta a diversas questões, entre as quais se encontram, as dificuldades que os alunos revelam na aprendizagem dos números racionais, as metodologias que a docente utiliza no ensino desta temática e as diversas representações que os alunos usam na resolução de tarefas com os números racionais, ver guião de entrevista (Apêndice II).

A análise da entrevista foi feita recorrendo à análise de conteúdo (Apêndice V).

Relativamente à perceção da professora sobre a turma, a docente referiu que *"estes possuem os conteúdos definidos pelo programa relativamente ao 2º ano de escolaridade".*

Quando questionada como considerava a turma na aprendizagem da matemática em geral, referiu que *"de um modo geral, a turma é motivada para a bordagem dos conteúdos matemáticos".* Relativamente aos números racionais a docente diz que *"primeiramente a motivação terá de se focar na associação ao real através de exemplos concretos".*

No que diz respeito às dificuldades dos alunos na aprendizagem dos fracionários e decimais a docente referiu que *" as dificuldades concentram-se na complexidade abstrata da temática, pelo que a bordagem deverá consistir numa exploração ao nível do operatório concreto."*

No seguimento deste assunto a docente referiu, ainda que *"as dificuldades que mais verificou ao longo da sua carreira docente centram-se na capacidade de compreensão, pois a temática é abstrata e não corresponde ao nível etário da maioria dos alunos."*

No âmbito das frações equivalentes considerou que *"as dificuldades prendem-se no âmbito da compreensão que condicionam a exploração da temática".* Justificando mais uma vez, *" a capacidade de abstração dos alunos desta faixa etária, regra geral não é a necessária para a aquisição e apreensão dos conteúdos definidos nos programas.*

Relativamente ao tipo de representações, que os alunos utilizam quando aprendem os números racionais a docente disse que *"inicialmente utilizam as representações pictóricas e posteriormente é que passam para a representação simbólica".* Em seguida, quando questionada sobre a facilidade deste grupo na conversão entre as várias representações de número racional referiu que *" como em qualquer grupo, este apresenta um carater heterogéneo ao nível da* *aquisição, compreensão e aplicação dos conteúdos, pelo que há alunos mais facilmente do que outros"*. Relembra ainda que existem no grupo alguns alunos que são mais velhos e *"para um deles alguns destes conteúdos já não são novidade, embora julgue que este se situe no mesmo nível dos restantes"*.

Em seguida, quando identificou tarefas e metodologias facilitadoras destas aprendizagens, referiu tarefas de associação à vida quotidiana com recurso a materiais manipuláveis. Justificando que, a sua manipulação facilita a compreensão e ajuda na realização de tarefas, deu como exemplos o recurso à régua graduada, as barras de *cuisinaire* e também alguns materiais didáticos criados pelos próprios alunos. Evidenciou, ainda que, as metodologias de cunho exploratório permitem a descoberta de conteúdos, devendo partir-se de contextos/ problemas do quotidiano dos alunos. Também referiu que a equivalência de frações deveria ser igualmente abordada através de metodologias exploratórias como recurso a materiais didáticos e sistematizada através da partilha de estratégias entre os alunos.

No final da entrevista a professora referiu que este estudo era muito relevante, e acrescentou ainda que, esta temática tem gerado grande controvérsia no meio educativo, sobretudo ao nível de conteúdos e aprendizagens que os alunos tem de realizar bem como o tempo que lhe é dedicado, referindo que talvez as metas sejam demasiado exigentes neste domínio, visto que, por vezes a maioria dos alunos ainda não desenvolveu as suas capacidades de cálculo relativamente aos números naturais, e que esse fator é condicionante da aprendizagem dos racionais.

2.2 Critérios de correção e resultados do T.A.D.

Para testar o nível de conhecimentos dos alunos envolvidos no estudo, foi realizado um Teste de Avaliação Diagnóstica (Apêndice VI), antes da implementação das tarefas inerentes aos conteúdos referentes ao domínio dos números racionais não negativos. Este teste comtemplava diversos conteúdos sobre os números racionais não negativos e teve como objetivo situar a investigadora em relação ao nível em que os alunos se encontravam relativamente ao domínio citado anteriormente e tendo por base os conteúdos e metas definidos para o 2º ano de escolaridade antes da implementação das tarefas relacionadas com o Desenvolvimento de Sentido de Número Racional.

Para poder classificar as tarefas anteriormente apresentadas foram criados alguns critérios de correção da resolução das mesmas (tabela N.º 4). A classificação individual das tarefas foi realizada da seguinte forma:

Classificação	Critérios
NC- Não Concretizou	Não houve tentativa ou a resolução não foi adequada
CP- Concretizou Parcialmente	Procedimento parcialmente correto
CT- Concretizou Totalmente	Resolução da tarefa sem erros

Tab. N.º 4 - Critérios de correção das tarefas

Tendo em conta os critérios de avaliação descritos anteriormente na tabela N.º 4, em seguida apresentam-se os resultados obtidos pelos 17 alunos no T.A.D.

Classificação	Pergunta 1	Pergunta 2	Pergunta 3	Pergunta 4	Pergunta 5
NC	**1**	0	**4**	0	**0**
CP	**0**	**2**	**0**	**0**	**1**
CT	**16**	**15**	**13**	**17**	**16**
Total alunos	**17**	**17**	**17**	**17**	**17**

Tab. N.º 5 - Resultados do TAD 1

Com base na análise da tabela N.º 5, pode-se verificar que, 4 alunos não concretizaram a tarefa 3, sendo nesta tarefa que um maior número de alunos (4) apresentou maior dificuldade na sua resolução. Os alunos tinham de identificar numa imagem as partes-todo, e em seguida identificarem a parte que estava colorida para representá-la na forma de fração.

Relativamente a tarefa 1,somente um aluno não a concretizou. Os alunos tinham de identificar o numerador e denominador de uma dada parte que constituía uma unidade continua. Esta tarefa foi apresentada no início desta sessão, e foi apresentada através de uma situação do quotidiano dos alunos, onde estes tinham de relacionar a partilha equitativa de uma unidade continua e utilizar alguns dos termos próprios inerentes aos números racionais.

Através da análise das observações diretas realizadas nesta tarefa e também dos dados aqui apresentados pode-se verificar que, os alunos revelaram algumas dificuldades na utilização de termos próprios sobre a temática deste estudo, nomeadamente na utilização da linguagem própria sobre as frações, referindo por exemplo, "o número que estava em cima ou ao que estava em baixo", o que confirma que os alunos não detinham o conceito de numerador nem de denominador e não percebiam o nome do sinal que representava a fração. Com base nesta análise considerou-se por isso, necessário trabalhar os aspetos de identificação de conceitos relacionados com as frações, nomeadamente parte-todo, unidade, frações equivalentes bem como a resolução de problemas com números fracionários.

O estudo realizou-se através da implementação de uma cadeia de tarefas, esta era constituída por alguns problemas e também por algumas tarefas de cariz exploratório onde os alunos utilizaram o apoio de alguns matérias não estruturados e também estruturados. Valorizou-se as estratégias intuitivas e informais dos alunos, bem como os conhecimentos que já tinham. Partiu-se assim, das representações de número racional que já conheciam, sobretudo a pictórica para introduzir gradualmente o trabalho de representação de fração e de numeral decimal. Pode-se concluir que todos os alunos adquiriram a maior parte dos conteúdos definidos no domínio dos números racionais referentes ao 2º ano de escolaridade.

3.Elaboração e Implementação do Plano de Ação

3.1 Descrição da aplicação das tarefas

As cinco sessões realizadas para este estudo ocorreram durante o período letivo dedicado às aulas de matemática, nomeadamente no período da manhã, variando a sua duração. A professora da turma colaborou regularmente tanto nas atividades apresentadas como na observação dos alunos.

No final de cada sessão houve momentos de troca de informações e de reflexão entre a investigadora e a professora titular, sobre as atividades realizadas bem como a adesão dos alunos às tarefas propostas e ao seu impacto/contributo na aprendizagem dos alunos.

Durante o período que durou este estudo foram realizados registos das sessões que serviram de apoio à investigação.

Durante a investigação a investigadora trabalhou os conteúdos previstos no programa, não tendo interferido com o horário normal e englobou as demais tarefas presentes neste estudo nos conteúdos a explorar.

A ordem pela qual foram implementadas as tarefas respeitou a ordem de exploração dos conteúdos previstos no programa, como se pode verificar através da tabela N.º6, esta mostra-nos a distribuição das tarefas realizadas em cada sessão, relacionando as mesmas com os conteúdos predominantes em cada uma delas.

Conteúdos	Tarefas/Objetivos	Duração
Noção de número racional. Fração como representação de diferentes grandezas.	**1ª Sessão- "Desenhos"** • Construir a unidade e representar um dado número de partes. • Construir a unidade a partir de uma parte da figura apresentada. • Construir a unidade a partir de uma parte da figura apresentada.	• 60 minutos
Ordenação de números racionais representados por frações com o mesmo denominador.	**2ª Sessão- "Sanduiche"** • Resolução Problemas- unidades continuas; comparar e ordenar frações com denominadores iguais.	• 90 minutos
Frações Equivalentes	**3ª Sessão "Tiras e dobras"** • Compreender e usar um número racional como quociente, relação parte-todo, razão, medida; • Representar sob a forma de fração um número racional não negativo; • Identificar e dar exemplos de frações equivalentes a uma dada fração	• 90 minutos
Frações Equivalentes	**4ª Sessão- "Frações Equivalentes"** • Relacionar diferentes unidades com outras grandezas equivalentes.	• 90 minutos
Fração como representação de diferentes grandezas. Ordenação e comparação de frações. Frações Equivalentes	**5ª Sessão- T.A.D.** Resolução Problemas: Unidades contínuas e discretas; representação, ordenação e comparação de frações equivalentes na reta numérica.	• 90 minutos

Tab. N.º 6 - Distribuição e respetivos conteúdos das tarefas realizadas em cada sessão

4.Análise e interpretação das sessões

4.1 Descrição das sessões

O estudo realizado teve como objetivo, perceber quais as representações que os alunos privilegiam durante o processo de ensino-aprendizagem dos números racionais não negativos, para tal a investigadora optou por privilegiar tarefas de cariz exploratório, tendo como suporte a utilização de materiais didáticos. A maioria das tarefas apresentadas teve um cariz individual, apesar de algumas terem sido realizadas a pares e outra em grupo de 4 elementos.

Na descrição das tarefas surgem por vezes transcrições de diálogos ocorridos durante a realização das tarefas, nos diálogos em questão encontramos identificada pela consoante “P” a professora (investigadora) e os alunos pela vogal “A” seguida da consoante inicial do nome do aluno envolvido no diálogo.

O início de cada sessão teve como grande objetivo a apresentação das tarefas, tendo a investigadora procedido à sua leitura em voz alta, frisando os principais elementos e objetivos, realizando em conjunto com o grupo a respetiva análise do enunciado das tarefas, retirando dúvidas existentes e dando indicações precisas sobre o modo de realização das mesmas bem como o tempo que dispunham para a sua realização.

No segundo momento, os alunos trabalharam autonomamente nas questões apresentadas. A investigadora circulou pela sala, verificando assim as dúvidas que os alunos sentiam bem como as dificuldades que surgiram ao longo da resolução das tarefas apresentadas. Na maioria das vezes estabeleceu-se um diálogo entre a investigadora e os alunos no sentido dos mesmos serem obrigados a pensar um pouco mais sobre as possíveis estratégias de resolução das tarefas e, na maioria das vezes, todos os alunos terminaram as tarefas.

Num terceiro momento, realizou-se a discussão coletiva, alguns alunos foram chamados a apresentar o seu trabalho e a comunicar aos outros a sua resolução, embora todos os alunos, de uma forma ou de outra, tenham tido oportunidade de participar, nomeadamente colocando questões e apresentando argumentos. Esta dinâmica de aula propiciou a análise das situações matematicamente significativas e promoveu o desenvolvimento de capacidades de raciocínio e comunicação. Este momento de discussão coletiva foi fundamental, pois é através da reflexão do seu próprio trabalho e da dos seus colegas, e do confronto das suas ideias com a dos outros, argumentando e analisando argumentos, que os alunos aprofundam e consolidam a sua aprendizagem. Este momento deve ser bastante valorizado, e mesmo que os alunos que não tenham concluído a resolução de todas as questões propostas podem participar na discussão, quer nas que resolveram, ou não.

No último momento da aula foi feita uma síntese e sistematização dos conhecimentos. A investigadora solicitou a participação de alguns alunos, para que estes apresentassem as ideias fundamentais que foram trabalhadas nesta aula.

Este é um momento em que as aprendizagens são tornadas explicitas e são evidenciadas, passando a fazer parte formal do domínio da turma. Esta sistematização ajuda os alunos a compreenderem e a registarem quais são as ideias efetivamente trabalhadas e como se ligam com os conceitos e procedimentos já aprendidos.

Enquanto na fase da discussão predomina o registo interrogativo, em que o professor questiona os alunos sobre as suas ideias e procura que estes encontrem alternativas, nesta ultima fase predomina um registo afirmativo, que é construído coletivamente sob a orientação do professor.

4.2 Análise e interpretação da 1ª Sessão- *"Desenhos"*

A primeira sessão (Planificação- Apêndice VII) teve a duração de 60 minutos. Esta sessão teve como principal objetivo (Tabela N.º 7-Apêndice X) perceber qual o interesse e motivação demonstrados pelos alunos perante as primeiras tarefas selecionadas para esta investigação em torno dos números racionais, e também perceber qual o nível dos seus conhecimentos neste domínio, de forma a verificar e validar também os dados obtidos na entrevista semiestruturada realizada à professora titular da turma e comparativamente aos resultados obtidos pelos alunos no T.A.D.

A **tarefa 2** foi a primeira tarefa selecionada para a análise neste estudo, durou cerca de 20 minutos e os alunos utilizaram material específico na sua realização, esta tarefa enquadrava-se no domínio Números e Operações e no conteúdo Números Racionais Não Negativos e tinha como objetivos específicos: desenvolver a compreensão da construção de partes e da reconstrução da unidade; desenvolver a noção de metade e oitava parte; a representação simbólica de frações unitárias.

Tarefa 2- Numa folha de papel quadriculado desenha uma figura e divide-a em oito partes iguais. Pinta metade dessa figura a vermelho.

Nesta tarefa foi pedido aos alunos que construíssem uma unidade (continua) e em seguida a dividissem em oito partes iguais, depois da divisão equitativa estar devidamente feita tinham de colorir metade da unidade (do todo).

O início desta sessão teve como objetivo a compreensão do enunciado da tarefa, para que os alunos em seguida a realizassem autonomamente. Após a leitura em voz alta feita pela investigadora, alguns dos alunos iniciaram de imediato a resolução individual da tarefa. No entanto, outros continuavam a reler para si o enunciado. Então pedi a um dos alunos para o ler em voz alta, como se pode verificar no diálogo em seguida transcrito:

"P"- A.P, Lê a tarefa em voz alta, por favor.

“A. P”- Numa folha de papel quadriculado desenha uma figura e divide-a em oito partes iguais. Pinta metade dessa figura a vermelho.

“P”- Então o que tens de começar por fazer nesta tarefa?

“A.P”- Desenhar uma figura há minha escolha.

“P”- Quantas partes iguais compõem a figura?

“A.P”- Duas partes.

“P”- Então uma dessas partes, corresponde a que parte da unidade?

“A.P”- Corresponde a metade da unidade.

“P”- E será isso que é pedido na tarefa?

“A.P”- Ahhh, não professora…. Pede para dividir a figura em oito partes.

“P”- Então ao dividirem a unidade em oito partes iguais, o que representa cada uma das partes?

“A.P”- Representa uma parte de oito.

“P”- Se quiseres representar esse valor através de uma fração, qual é o denominador da fração? E o numerador?

“A.P”- O denominador é oito e o numerador é um.

“P”- O que representa o denominador da fração?

“A.P”- O denominador representa o número de partes em que a unidade foi dividida.

“P”- O que representa o numerador da fração?

“A.P”- Representa uma parte das oito.

“P”-Então, como se lê essa representação na forma de fração?

“A.P”- Lê-se um a dividir por oito.

“P”- Alguém pode ajudar o colega….

“A.B”- Lê-se um oitavo, e representa-se $\frac{1}{8}$.

Pedi também ao aluno “A.R” que explicasse o seu raciocínio.

"A.R"- Professora, temos de desenhar por exemplo um quadrado e depois dividi-lo em oito partes. No fim pintamos metade do quadrado.

"P"- Alguém tem outra estratégia diferente que queira comunicar aos colegas?

"A.L"- Também podemos desenhar um triângulo e depois dividir em oito partes iguais.

"P"- E como sabemos realmente que as partes são iguais?

"A.L"- Teríamos de medir o seu tamanho, tínhamos de medir cada uma dessas partes, só assim saberíamos, mas isso é muito difícil. É melhor escolher outra figura.

Após este diálogo decidi observar diretamente o trabalho que o aluno "A.R." anteriormente transcrito, estava a desenvolver, constatei que o aluno desenhou um quadrado e o dividiu em oito partes iguais, em seguida coloriu a vermelho metade dessa figura mas acabou por a dividir novamente ao meio, ou seja acabou obter uma figura com 16 partes e não com oito, como era pedido, como se pode verificar através da imagem N.º 2:

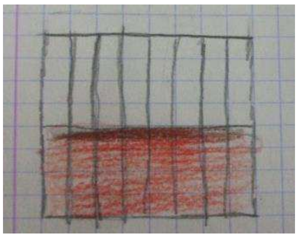


Imagem N.º 2 - representação aluno N.º17

Este aluno, apesar de inicialmente ter conseguido explicar corretamente a forma de resolver a tarefa não a concretizou de acordo com o que explicou, tendo no final da sua resolução efetuado uma divisão que não se adequava ao que era pedido. Quando questionado novamente sobre a sua resolução respondeu o seguinte:

"P"- Podes explicar o que fizeste depois de teres desenhado a tua figura?

"A.R"- Em seguida dividi-a ao meio e em seguida em oito partes iguais, e pintei metade da figura.

"P"- então se no início a dividiste ao meio, com quantas partes ficou a figura?

Depois de a dividires em oito partes, em seguida voltaste a dividi-la ao meio, então em quantas partes ficou dividida a tua figura?

"A.R."- ficou dividida com duas.

"P"- Sim, e em seguida dividiste-a novamente em 8 partes, então no final com quantas partes ficou a figura e diz-me o número de partes em que ela está dividida?

"A.R"- Vou contar professora, 16 partes.

"P"- era isso que era pedido na tarefa?

"A.R"- Não, mas já sei o que fiz mal, só devia ter dividido a figura em oito partes e ter pintado metade.

"P"- Sim, e nesse caso quantas terias de ter pintado?

"A.R"- Só 4 partes. Mas não foi o que fiz, porque a seguir dividi ainda ao meio, o deu oito partes pintadas.

O aluno quando foi questionado sobre o que teria de fazer nesta tarefa revelou alguma confusão, pois inicialmente foi capaz de descrever corretamente todos os procedimentos, mas no final ao realizar uma nova divisão (incorretamente), acabou por alterar o resultado das partes que constituem a figura, embora em termos de frações sejam equivalentes.

Após a inquirição da investigadora acerca do que estaria incorreto, o aluno continuou a não perceber que a sua resolução não estava de acordo com o que ele descrevera inicialmente, só no final quando lhe foi sugerido que observasse e contasse o número de partes que a figura tinha coloridas é que percebeu o que tinha falhado no seu procedimento, ou seja, depois de a figura estar dividida em 8 partes iguais, o aluno dividiu-a ao meio e pintou metade, assim a figura não ficou dividida em 8 partes mas sim em 16 e o aluno coloriu 8 delas e não 4 como era pedido, como se pode verificar na imagem N.º 1, em cima apresentada.

No entanto, alguns alunos conseguiram resolver a tarefa com sucesso, mas outros revelaram alguma dificuldade na divisão da figura em partes equitativamente iguais, sendo visível a discrepância existente entre as partes que constituem o todo, o que se traduz na falta de rigor e exatidão que a atividade requeria, como se pode verificar pelas imagens N.º 3 e N.º 4 em seguida apresentadas:

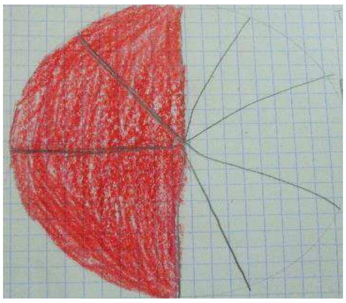


Imagem N.º 3 - representação aluno N.º2

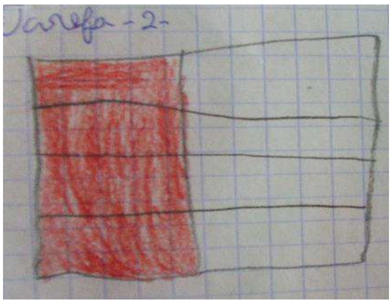


Imagem N.º 4 - representação aluno N.º1

No entanto, quatro dos alunos, ao desenharem a figura não foram capazes de a dividir em oito partes iguais como lhes era indicado na tarefa.

O aluno que utilizou o modelo circular apresentou a sua unidade dividida em sete partes, como se pode verificar na imagem N.º 5. Este aluno inicialmente dividiu a figura ao meio e em seguida, dividiu-a novamente ao meio, encontrando assim a quarta parte da unidade. Seguidamente, dividiu-a novamente dois dos quartos ao meio e obteve assim a sexta parte do todo, no entanto, não finalizou o processo seguinte corretamente, de modo a obter as oito partes da unidade. Não prolongou a linha até ao final dos dois quartos, ficando a unidade assim dividia em sete partes e não em oito como era pedido.

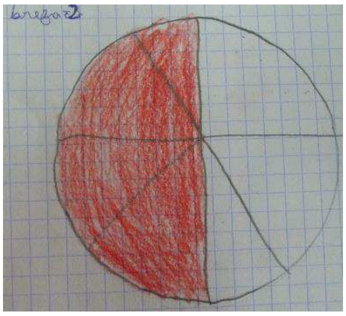


Imagem N.º 5 - representação aluno N.º 16

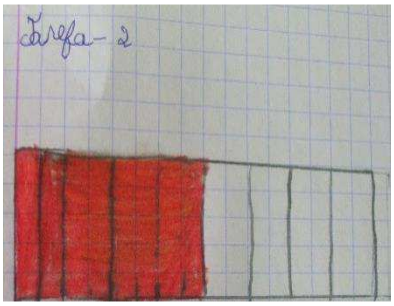


Imagem N.º 6 - representação aluno N.º11

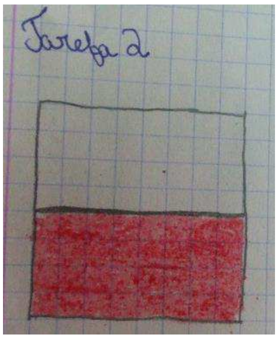


Imagem N.º 7 - representação aluno N.º3

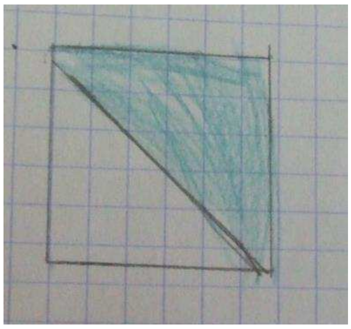


Imagem N.º 8 - representação aluno N.º4

Através da imagem N.º 6, podemos verificar que o aluno N.º 11 representou a unidade utilizando o modelo retangular, inicialmente desenhou toda a linha exterior da figura passando em seguida para a sua divisão, no entanto como se pode observar, não a dividiu em oito partes iguais, a parte que se encontra sem estar colorida foi dividida em quatro partes iguais sendo cada uma delas composta por 2 quadriculas no comprimento e por 5 na altura.

Relativamente à parte colorida, o aluno não realizou a divisão com o mesmo rigor que anteriormente foi descrito, pois como se pode verificar na imagem N.º 6, cada parte inicialmente foi dividida utilizando apenas uma quadrícula no comprimento, em vez de duas, apesar do aluno ter apagado algumas dessas linhas, por falta de atenção, acabou por deixar uma delas, o que alterou a divisão das partes da figura e assim não cumpriu o que lhe era pedido na tarefa.

A imagem N.º 7 revela-nos que este aluno inicialmente desenhou uma figura utilizando um modelo retangular e a dividiu-a ao meio, em seguida coloriu uma das suas partes, esqueceu-se no entanto de realizar a divisão da figura em oito partes iguais, o que também alterou a sua representação.

Através da imagem N.º 8 pode-se verificar que o aluno N.º 4, optou por desenhar um quadrado embora não tenha sido rigoroso nas suas dimensões, no entanto, também não foi capaz de interpretar os dados do enunciado da tarefa corretamente, porque o que fez, foi dividir (como o aluno anterior) a figura em duas partes iguais e não em oito como era pedido, limitando-se em seguida a colorir uma das partes que constituíam o todo, embora encontrando assim $\frac{1}{2}$ da figura e não exatamente o que era pretendido.

Devo salientar que o aluno N.º 5 apresentou uma estratégia diferente de todos os outros na resolução da tarefa, desenhou uma unidade discreta composta por oito retângulos, como se pode verificar na imagem N.º 9.

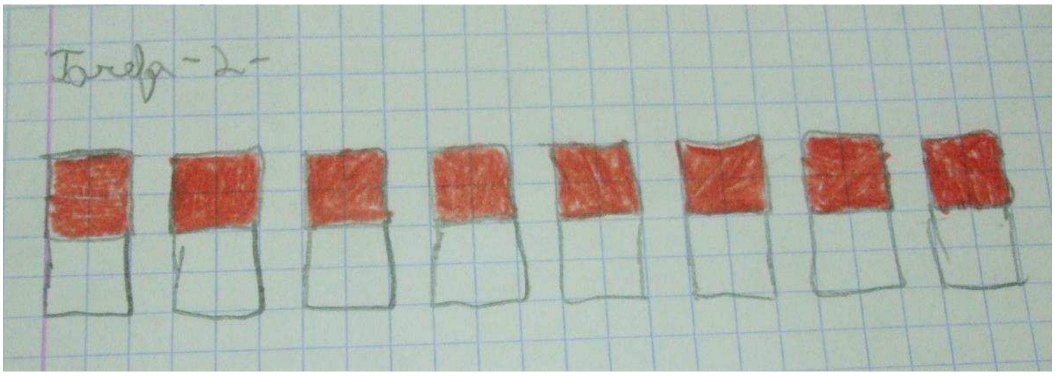


Imagem N.º 9 - representação aluno N.º 5

Quando foi questionado pela investigadora sobre a sua figura que desenhou respondeu o seguinte:

"A.D"- Eu desenhei oito partes iguais separadas e pintei metade de cada uma.

"P"- E era isso que era pedido na tarefa?

"A.D"- Não.

"P"- Então o que tinhas de fazer de acordo com o que te era pedido?

"A.D"- Tinha de desenhar uma figura e dividi-la em oito partes e pintar depois 4 dessas partes.

"P"- Então e porque não fizeste isso?

"A.D"- Porque pensei que podia desenhar as oito partes separadas e depois pintar metade das partes.

"A.B"- Mas assim tu não desenhaste só uma figura, mas 8, e não era isso que era pedido.

"P"- E ao pintares metade de cada uma dessas partes, qual foi a fração que obtiveste?

"A.D"- Pintei metade de oito partes.

"P"- Sim, mas como podemos representar esse valor através de uma fração?

"A.D"- então pintei oito de dezasseis partes, fica oito dezasseis avos.

"P"- E era isso que era pedido para fazer?

"A.D"- Não, tínhamos de dividir a unidade em oito partes e pintar metade.

"P"- Nesse caso, quanto é metade de 8?

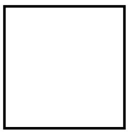
"A.D"- é 4, tínhamos de pintar 4 partes

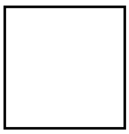
"P"- no teu caso, que apresentaste um modelo diferente de unidade, utilizaste o modelo discreto, se a tua unidade é composta por 8 retângulos, terias de pintar metade deles, logo terias de pintar quantos?

"A.D"- Tinha de pintar metade de 8 que são 4.

Com base nas observações e nas transcrições do que foi feito na aula, pode-se concluir que a maioria dos alunos concretizou totalmente a tarefa sem erros, também uma parte dos alunos a concretizou parcialmente, ou seja utilizaram procedimentos adequados no seu desenvolvimento mas não a concretizaram totalmente, só 3 alunos realmente revelaram algumas dificuldades na interpretação e execução da tarefa, como se pode verificar pelas transcrições anteriormente feitas, as dificuldades prenderam-se sobretudo com a conceptualização do todo, o que acabou por desencadear todos os procedimentos necessários para a complementação da tarefa de forma não correta.

Tarefa 3-

Se  for $\frac{1}{2}$ de uma figura desenha a figura completa numa folha.

Se  for $\frac{1}{4}$ de uma figura desenha a figura completa numa folha.

Na terceira tarefa proposta, os alunos tinham de construir a unidade, ou seja o todo, a partir das partes que eram dadas mas de acordo com a figura apresentada. O contexto apresentado era puramente matemático, no significado parte-todo. A informação é apresentada simultaneamente na representação pictórica e em fração.

Inicialmente o enunciado da tarefa foi lido em voz alta pela investigadora e em seguida procedeu-se à sua interpretação, após esta fase foi pedido a um aluno que fizesse a leitura do enunciado em voz alta.

"A.R"- Se o quadrado for uma de duas partes de uma figura desenha a figura completa numa folha.

“A.M”- Posso ler?

“P”- Espera um pouco se faz favor.

“P”-Vamos tentar novamente…

“P”- Então como lemos a fração que consta no enunciado da tarefa? O que lemos em primeiro lugar?

“A.R.”- Primeiro lemos o número que está em cima que é um.

“P”- Sim, e como se chama ao número que está em cima?

“A.R.”- O que está em cima é o numerador e o que está em baixo é o denominador.

“P”- Então vamos tentar fazer a leitura da fração.

“A.R.”- um meio.

“P”- Quem sabe outra forma de ler a fração?

“A.I”- Podemos dizer metade.

“P”- Correto. A.M podes ler o enunciado da tarefa?

“A.M”- se o quadrado for metade de uma figura desenha a figura completa numa folha.

“P”- Então, o que tem de desenhar para que a figura fique completa?

“A.R”- Temos de desenhar dois quadrados.

“P”- E como os podemos apresentar na folha?

“A.R”- Cada um dos quadrados tem de ser igual ao que é mostrado na tarefa.

“P”- Muito bem. E nesse caso a figura apresentada na tarefa, que parte é do todo ou da unidade?

“A.M”- A figura apresentada, representa a uma das duas partes da unidade.

“A.C”- Mas podemos desenhar dois quadrados iguais, um ao lado do outro, porque assim a figura já é o dobro daquela que está na tarefa.

Em seguida, são apresentadas algumas das diferentes representações (imagens N.º 10, 11, 12 e 13) utilizadas na realização desta tarefa, que servem para ilustrar os diálogos anteriormente transcritos.

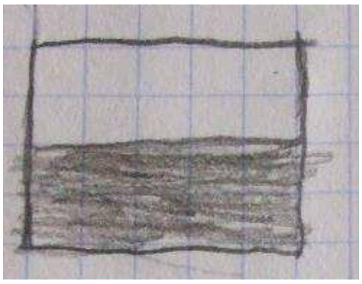


Imagem N.º 10 - representação aluno N.º17

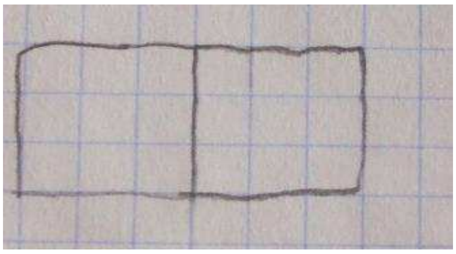


Imagem N.º 11 - representação aluno N.º16

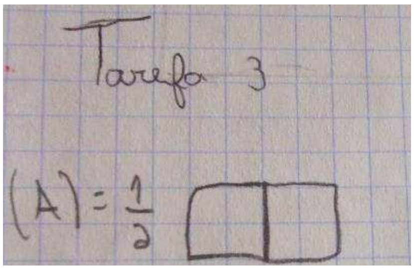


Imagem N.º 12 - representação aluno N.º 15

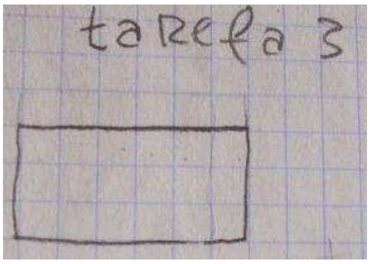


Imagem N.º 13 -representação aluno N.º7

A imagem N.º14 e N.º15, apresentadas em seguida, revelam as figuras que os alunos N.º1 e N.º13 criaram para dar resposta à tarefa 3, podemos verificar que estes alunos não compreenderam que no enunciado da tarefa, lhes foi dada a figura geométrica que representava uma fração da unidade, neste caso um quadrado, que valia metade, 0,5 ou $\frac{1}{2}$ daquilo que teriam de desenhar, logo a unidade era composto por 2 quadrados iguais aquele que contava no enunciado na tarefa 3.

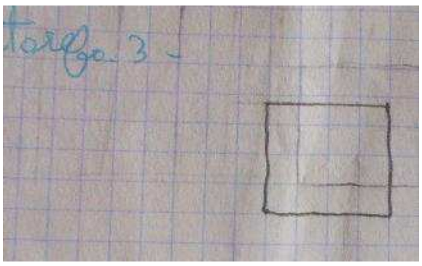


Imagem N.º 14 - Representação do aluno N.º 1

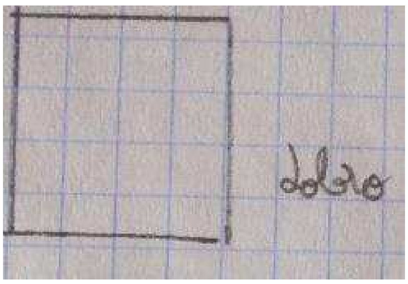


Imagem N.º 15 - Representação do aluno N.º 13

Na mesma tarefa, os alunos tinham ainda de desenhar uma segunda figura, que fosse o quadruplo da figura inicialmente apresentada, como se pode ver em seguida, através das imagens N.º 16, 17, 18, 19, 20 e 21.

"P"- A.R podes ler em voz alta o enunciado da tarefa?

"A.R"- Sim professora. Se o quadrado for um quarto de uma figura desenha a figura completa numa folha.

"P"- Então neste caso a figura que nos é apresentada a que parte da unidade corresponde?

"A.R"- não sei professora.

"P"- Sabes sim, repara… temos um quadrado que representa uma de quantas partes da unidade?

"A.R- Representa uma de quatro partes. Representa um quarto. Sim a fração é 1 sobre 4 e escreve-se $\frac{1}{4}$.

"P"- Então a nossa unidade vai ser composta por quantos quadrados?

"A.L"- Por quatro quadrados.

"P"- Muito bem.

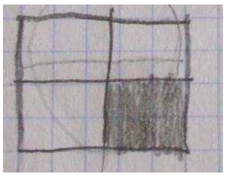


Imagem N.º 16 - representação aluno N.º 17

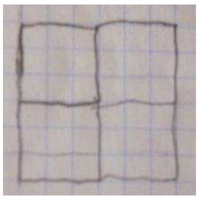


Imagem N.º 17 - representação aluno N.º16

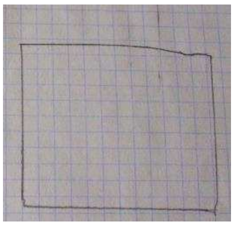


Imagem N.º 18 - representação aluno N.º13

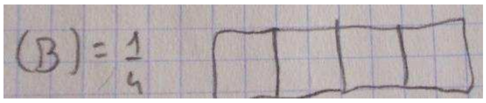


Imagem N.º 19 - representação aluno N.º 15

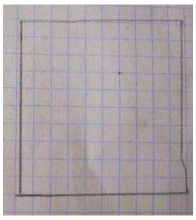


Imagem N.º 20 - representação aluno N.º2

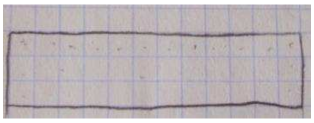


Imagem N.º 21 - representação aluno N.º 7

Depois dos alunos terem desenhado as figuras, no final foi feita uma síntese sobre a tarefa, como se pode confirmar pelos diálogos em seguida transcritos.

"P"- A.L podes dizer-me que relação existe entre as duas figuras que desenhaste?

"A.L"- A primeira figura representa metade da segunda.

"P"- Como é que podes representar o que disseste mas utilizando outra representação?

"A.L"- Posso dizer que a figura A é $\frac{1}{2}$ da figura B.

"A.N"- Ou então que, a figura B é o dobro da figura A.

"P"- E nesse caso a figura B é composta por quantos quadrados?

"A.N"- A figura tem 4 quadrados.

"P"- Imaginem que eu retiro um desses quadrados, com quantos ficam?

"A. N"- Ficamos com 3 quadrados, ou seja, com $\frac{3}{4}$ da unidade.

A tabela N.º 8 mostra-nos a distribuição, dos resultados obtidos nas tarefas iniciais referente à sessão "Desenhos", na qual foram trabalhados conceitos referentes à linguagem própria dos números racionais, nomeadamente a leitura de frações, à capacidade de relacionar metade e dobro, a quarta parte e o quadruplo.

Resultados	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3
TOTAL CT	17	8	6
TOTAL CP	0	5	7
TOTAL NC	0	4	4

Tab. N.º 8 - Resultados tarefa Desenhos

CT- Concretizou Totalmente **CP**- Concretizou Parcialmente **NC**- Não Concretizou

Ao analisar a tabela N.º 8, pode-se concluir que todos os alunos concretizaram totalmente a tarefa 1. Esta foi deixada para o fim da sessão, visto se ter achado melhor iniciar a mesma com a tarefa 2, assim a leitura e interpretação de frações foi exaustivamente trabalhada logo no início da mesma, abordando uma metodologia exploratória, no final da sessão cada aluno, individualmente resolveu a tarefa 1 sem revelar quaisquer dificuldades.

Em relação à tarefa 2, 8 alunos concretizaram totalmente esta tarefa, 5 concluíram-na parcialmente e 4 alunos não a concretizaram.

Na tarefa 3, 4 alunos não a concretizaram, 7 alunos concretizaram-na parcialmente, e 6 concretizaram-na totalmente. Esta foi a tarefa que obteve menor número de resultados totalmente concretizados, ou seja um maior número de alunos revelou dificuldades que se prenderam com a compreensão de relações como o dobro e a metade, o quadruplo e a quarta parte.

Pode-se concluir que, a maioria dos alunos revelaram algumas dificuldades na representação da unidade a partir de uma das suas partes. Neste caso não conseguiram relacionar ¼ com o quadruplo da parte dada. Alguns alunos não apresentaram a sua resolução de acordo com o que relataram quando questionados sobre os procedimentos /estratégias que tinham de desenvolver na sua resolução. Este facto revela que os alunos não estavam seguros das suas estratégias e quando iniciaram na prática as suas resoluções não seguiram o que anteriormente enumeraram.

4.3 Análise e interpretação 2ª Sessão- "Sanduiche"

A segunda sessão (Planificação- Apêndice VIII) teve a duração de 90 minutos. Esta sessão teve como principal objetivo a Resolução de Problemas, sendo estes definidos segundo (Boavida, 2008) do tipo de Problemas de Processo. Enquadrando-se no domínio Números e Operações e no conteúdo Números Racionais Não Negativos e tinham como objetivos específicos: a partilha equitativa bem como a comparação de frações unitárias com denominadores iguais e posteriormente diferentes ($\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$) de forma a que os alunos compreendessem que, quanto maior é o denominador, menor é a quantidade que a fração representa.

A sessão iniciou-se com a leitura em voz alta do enunciado do problema que se denominava *"Sanduiche"* (Apêndice VII), este era composto por mais 3 alíneas. Depois de feita a sua leitura e respetiva interpretação, os alunos iniciaram a sua resolução individualmente, foi-lhes dado cerca de 25 minutos para a resolução, cada aluno teve assim a possibilidade de escolher as estratégias de resolução que mais se adequassem e em que se sentissem mais à vontade. Após esta fase, alguns alunos foram apresentar as suas estratégias de resolução ao quadro procedendo em simultâneo à comunicação oral dos resultados obtidos, neste momento os colegas tiveram oportunidade de colocar questões/dúvidas e observações sobre os diversos passos e conteúdos necessários para a concretização do problema.

Tarefa 4- A Rita preparou uma sanduíche comprida para o lanche da família. Dividiu a sanduíche em quatro partes iguais. A Rita comeu uma parte e o pai comeu duas partes. Representa o que se passou.

Depois da sua resolução, procedi à análise das respostas dadas pelos alunos, como se pode verificar em seguida na tabela N.º 9. Esta contempla a compreensão do enunciado do problema, baseada nas fases de resolução de problemas criada por *Pólya* e o nível de concretização do problema.

Resultados obtidos na tarefa 4

Alunos	Resolução Problemas "Sanduiche"														
	Compreensão do enunciado problema 4			RESULTADOS											
				Problema 4			a)			b)			c)		
	IN	IP	IC	NC	CP	CT	NC	CP	CT	NC	CP	CT	NC	CP	CT
Aluno 1			X			X			X			X			X
Aluno 2		X				X			X			X		X	
Aluno 3			X			X			X			X			X
Aluno 4			X			X			X			X			X
Aluno 5	X				X		X			X					X
Aluno 6			X			X			X			X			X
Aluno 7		X				X			X			X		X	
Aluno 8		X				X			X			X		X	
Aluno 9		X				X	X			X					X
Aluno 10		X				X			X			X		X	
Aluno 11			X			x			X			X			X
Aluno 12		X				X	X			X					X
Aluno 13			X			X			X			X			X
Aluno 14			X			X			X			X			X
Aluno 15			X			X			X			X			X
Aluno 16		X			X				X	X				X	
Aluno 17			X			X			X			X			X
Totais	1	7	9	0	2	15		0	14	4	0	13	0	5	12

Tab. N.º 9 - Resultados obtidos na tarefa 4

IN-Interpretação nula **IP-** Interpretação parcial **IC-** Interpretação completa **NC-** Não concretizou **CP-** Concretizou parcialmente **CT-** Concretizou totalmente

Como se pode verificar pelos dados apresentados na tabela N.º 9, no que diz respeito ao nível da compreensão do enunciado do problema, somente 1 aluno teve uma interpretação nula, o que acabou por condicionar todo o seu desempenho na resolução de todas as restantes questões apresentadas. 7 dos alunos interpretaram parcialmente o enunciado do referido problema e 9 alunos conseguiram a interpretação completa do enunciado deste problema.

No que diz respeito à resolução do problema 4, podemos verificar pelos dados apresentados na tabela 9 que, 2 dos alunos resolveram parcialmente o referido problema, os restantes 15 alunos resolveram-no totalmente.

No que diz respeito à alínea a), 14 alunos concretizaram totalmente o referido problema no entanto, os restantes 3 alunos, não concretizaram a referida tarefa. Relativamente à alínea b), 4 alunos não a concretizaram enquanto os outros 13 concretizaram-na totalmente. No que diz respeito a alínea c), esta foi onde os alunos no geral revelaram menos dificuldades quer ao nível da interpretação bem como ao nível da resolução, como se pode confirmar na tabela N.º 9, 5 alunos conseguiram concretizar parcialmente a referida alínea e os restantes 12 conseguiram concretiza-la totalmente.

No geral a turma apresentou uma média positiva relativamente à interpretação de enunciados de problemas que envolvem números racionais e também conseguiram atingir uma média bastante satisfatória na capacidade de concretização dos mesmos.

No entanto, analisando os objetivos específicos de cada uma das tarefas apresentadas, podemos concluir que na última alínea, na qual os alunos tinham de dividir a unidade em três partes iguais e distribui-las de forma equitativa, os alunos não revelaram grande dificuldade na resolução do problema, embora 5 dos alunos não tenham conseguido resolver o problema totalmente.

Penso que isto se deveu ao facto destes não apresentarem o raciocínio completamente adequado para a resolução deste problema, no entanto todos estes alunos referiram que não sobrava nenhuma parte da sanduiche mas não apresentaram a justificação correta para a resposta que deram, a maioria deixou a sua justificação incompleta, apresentando somente a resposta final e não os cálculos ou esquemas que seriam necessários para complementar os seus raciocínios. (ver tabela N.º 10)

Representações utilizadas pelos alunos na resolução Problemas segundo Bruner

Alunos	**Representações dos alunos na tarefa 4**											
	Tarefa 4			**a)**			**b)**			**c)**		
	A	**I**	**S**	**A**	**I**	**S**	**A**	**I**	**S**	**A**	**I**	**S**
Aluno 1		**X**				**X**			**X**			**X**
Aluno 2			**X**			**X**			**X**			**X**
Aluno 3		**X**			**X**				**X**		**X**	
Aluno 4			**X**			**X**			**X**		**X**	
Aluno 5		**X**				**X**			**X**		**X**	
Aluno 6		**X**				**X**			**X**		**X**	
Aluno 7		**X**				**X**			**X**		**X**	
Aluno 8		**X**				**X**			**X**			**X**
Aluno 9		**X**				**X**			**X**		**X**	
Aluno 10		**X**				**X**			**X**			**X**
Aluno 11		**X**				**X**			**X**		**X**	
Aluno 12			**X**			**X**			**X**		**X**	
Aluno 13		**X**				**X**			**X**			**X**
Aluno 14		**X**				**X**			**X**			**X**
Aluno 15		**X**				**X**			**X**			**X**
Aluno 16		**X**				**X**			**X**		**X**	
Aluno 17			**X**		**x**				**X**			**X**
Totais	**0**	**13**	**4**	**0**	**2**	**15**	**0**	**0**	**17**	**0**	**9**	**8**

Tab. N.º 10 - Representações alunos problema 4

A- Representação Ativa **I- Representação Icónica** **S- Representação Simbólica**

Através dos dados apresentados na tabela N.º 10, podemos verificar que na tarefa 4, nenhum aluno utilizou na sua resolução a representação ativa.

13 alunos utilizaram a representação icónica e somente 4 alunos utilizaram na sua resolução a representação simbólica, 2 desses alunos são os mais velhos da turma e os outros 2 são alunos que tem obtido excelente na área da matemática.

Relativamente à alínea a) a maioria dos alunos (15) utilizou a representação simbólica na resolução da mesma e somente 2 alunos utilizaram a representação icónica na resolução desta alínea.

Na alínea b) todos os alunos utilizaram a representação simbólica nas suas resoluções, embora como podemos verificar na tabela N.º 10, 4 alunos não tenham conseguido concretizar a tarefa, assim foram 13 alunos que apresentaram na sua resolução a representação simbólica.

Relativamente à alínea c), existiu um número muito equilibrado nas representações utilizadas na resolução da tarefa, 9 alunos recorreram a representações icónicas e 8 a representações simbólicas.

Pode-se concluir que na apresentação do problema inicial, a maioria dos alunos revelou sentir maior confiança na utilização de representações icónicas para a resolução do mesmo, no final, quando lhes foi apresentado uma nova extensão do mesmo problema, verificou-se um aumento no número de alunos que foram capazes de mudar as representações utilizadas, ou seja, passou-se da representação icónica para a simbólica.

Tarefa 5- Na festa de anos da Maria ofereceram-te um chocolate do qual tu comeste metade. Apareceu depois um amigo que te pediu para lhe dares um bocado. Se quiseres dar metade, da metade que te sobrou ao teu amigo, que parte do chocolate inteiro darás ao teu amigo? Explica e regista o teu raciocínio, podes utilizar desenhos, esquemas, palavras.

De acordo com o enunciado da tarefa 5, os alunos tinham de identificar as partes que constituíam a unidade, neste caso teriam de perceber que metade do chocolate já tinha sido comida e de acordo com o que tinha sobrado, voltavam a encontrar metade da metade. Os alunos quando questionados sobre a que parte correspondia metade da metade, disseram que era um quarto. Explicaram então que, para encontrar essa parte tinham dividido a unidade em 2 partes iguais e depois voltaram novamente a dividir cada metade ao meio.

Chegaram assim à conclusão que a unidade tinha sido dividida em quatro partes iguais, duas dessas partes já tinham sido comidas e no final davam ao amigo metade do que tinha sobrado, ou seja, um quarto da unidade. (ver tabela N.º 11)

Resultados e representações usadas na tarefa 5

Análise da tarefa 5									
Alunos	Compreensão do enunciado da tarefa 5			Resultados da tarefa 5			Representações Utilizadas		
	Interp. Nula	Inter. Parcial	Inter. Completa	Não Concretizou	Concretizou Parcialmente	Concretizou Totalmente	Ativas	Icónicas	Simbólicas
Aluno 1		X			X				X
Aluno 2	------	-----	------	-----	-----	-----	-----	-----	-----
Aluno 3			X			X		X	
Aluno 4			X			X		X	
Aluno 5		X			X				X
Aluno 6			X			X		X	
Aluno 7			X			X		X	
Aluno 8			X		X				X
Aluno 9			X			X			X
Aluno 10			X			X		X	
Aluno 11		X			X			X	
Aluno 12			X			X		X	
Aluno 13		X			X			X	
Aluno 14			X			X			X
Aluno 15			X			X		X	
Aluno 16			X			X			X
Aluno 17		X			X			X	
Totais	0	5	11	0	6	10	0	11	6

Tab. N.º 11 - Resultados obtidos tarefa 5

Através da análise aos dados apresentados na tabela N.º 11 pode-se verificar que, 11 alunos conseguiram interpretar completamente o enunciado da tarefa 5, a maioria também foi capaz de utilizar adequadamente termos próprios sobre as frações e relacionar a metade e a quarta parte como duas grandezas distintas mas que ambas englobam conceitos de proporcionalidade direta. No entanto, pode-se confirmar que 5 alunos tiveram as suas resoluções concretizadas parcialmente, isto deveu-se ao facto de também as suas interpretações ao enunciado do problema não terem sido completas, o que acabou por condicionar os seus resultados finais.

Tarefa 6.1 - Na mesma festa Havia dois bolos do mesmo tamanho, um era de laranja e o outro de limão. O bolo de laranja foi partilhado igualmente pela Inês, a Ana e pelo Diogo. O bolo de limão foi partilhado igualmente pela Maria, O Tiago, o Rui e pela Joana. Com que parte do bolo ficaram cada uma das crianças?

Neste tarefa os alunos tinham de resolver um problema matemático no qual tinham de fazer a comparação de frações unitárias com denominadores diferentes, os alunos tinham de fracionar as unidades (bolos) de acordo com o número de pessoas que comeu de cada um deles, no final era esperado que compreendessem efetivamente a relação que existe em unidades iguais mas fracionadas por um número diferente de partes, ou seja, quanto maior for essa divisão, menor será a parte que cabe a cada pessoa (partilha equitativa). (Ver tabela N.º 12)

Resultados obtidos e representações usadas na tarefa 6.1

Análise da tarefa 6.1									
Universo 17 alunos	Compreensão do enunciado da tarefa 6.1			Resultados da tarefa 6.1			Representações Utilizadas		
	Inter.Nula	Inter. Parcial	Iinter. Completa	Não Concretizou	Concretizou Parcialmente	Concretizou Totalmente	Ativas	Icónicas	Simbólicas
Aluno 1			X			X		X	X
Aluno 2	X			X			-	-	-
Aluno 3			X			X		X	X
Aluno 4			X			X		X	X
Aluno 5			X			X		X	X
Aluno 6			X			X		X	X
Aluno 7			X			X		X	X
Aluno 8			X			X		X	X
Aluno 9			X			X		X	X
Aluno 10			X			X		X	X
Aluno 11			X			X		X	X
Aluno 12		X			X			X	X
Aluno 13			X			X		X	X
Aluno 14			X			X		X	X
Aluno 15			X			X		X	X
Aluno 16			X			X		X	X
Aluno 17			X			X		X	X
Totais	1	1	15	1	1	15	0	16	16

Tab. N.º 12 - Resultados obtidos tarefa 6.1

Através da análise da tabela N.º 12, podemos verificar que o aluno N.º 2 não respondeu a esta alínea. Somente 1 dos alunos revelou ter uma interpretação parcial do problema, o que condicionou o seu resultado, tendo este concretizado parcialmente o problema. Os restantes 15 alunos não revelaram dificuldades na compreensão do problema nem na sua resolução, todos eles utilizaram nas suas representações as representações icónicas juntamente com as simbólicas, relativamente a esta última todos utilizaram uma linguagem matemática na qual apresentaram o número racional na forma de fração.

Na tarefa 6.2 os alunos tinham de apresentar a justificação relativamente às partes que constituíam cada uma das unidades relacionando-as com denominadores de cada uma das frações. (ver tabela N.º 13)

Resultados obtidos e representações usadas na tarefa 6.2

Análise da tarefa 6.2									
Universo 17 alunos	Compreensão do enunciado da tarefa 6.2			Resultados da tarefa 6.2			Representações Utilizadas		
	IN	IP	IC	NC	CP	CT	A	I	S
Aluno 1			X			X			X
Aluno 2	X			X			-	-	-
Aluno 3			X			X			X
Aluno 4	X			X			-	-	-
Aluno 5		X			X				X
Aluno 6			X			X		X	X
Aluno 7			X			X		X	X
Aluno 8			X			X			X
Aluno 9			X			X			X
Aluno 10			X			X		X	X
Aluno 11		X			X				X
Aluno 12			X		X				X
Aluno 13		X			X				X
Aluno 14			X			X			X
Aluno 15			X			X			X
Aluno 16			X			X			X
Aluno 17			X			X		X	X
Totais	2	3	12	2	4	11	0	4	15

Tab. N.º 13 - Resultados obtidos tarefa 6.2

Através da análise da tabela N.º 13 podemos verificar que os alunos N.º 2 e 4 não responderam a esta alínea.

Somente 3 dos alunos revelaram ter uma interpretação parcial do problema, o que condicionou o seu resultado final, tendo a sua resolução sido também parcial.

Os restantes 12 alunos não revelaram dificuldades na compreensão do problema nem na sua resolução, no entanto 4 alunos utilizaram nas suas resoluções as representações icónicas juntamente com as simbólicas. Os restantes 11 utilizaram nas suas resoluções somente a representação simbólica, expressando os resultados na forma de fração.

Pode-se concluir que a resolução de problemas e a devida comunicação matemática entre o grupo de alunos, bem como a sistematização dos conhecimentos trabalhados ao longo desta sessão revelou-se muito positiva, como se pode verificar pela análise dos resultados obtidos pelos alunos na concretização dos problemas apresentados nesta sessão e também através da reflexão conjunta que se efetuou no final da aula entre a investigadora e a professora titular da turma.

Pode-se assim validar através dos pressupostos selecionados para este estudo e devidamente apresentados na sua fundamentação teórica, como é o caso do conceito de matematização progressiva, defendido por *Gravemeijer* (1994), em que este defende que, os alunos vão de uma forma gradual e cada vez mais intuitiva ganhando confiança na aprendizagem dos números racionais através de tarefas, em que se utilize o recurso a situações do seu dia-a-dia e gradualmente vão selecionando as representações mais adequadas ao tipo de problemas/tarefas apresentadas, também se confirmou que não deixam de utilizar umas representações para passarem a utilizar outras, mas alguns utilizaram duas em simultâneo e alguns passaram para as simbólicas, de acordo com o tipo de tarefa apresentado.

4.4 Análise e interpretação da 3ª Sessão- "Tiras e Dobras"

A terceira sessão (Planificação- Apêndice IX) teve a duração de 90 minutos. Esta sessão teve como principal objetivo a resolução em pares da tarefa "Tiras e Dobras", que consistia na criação e manipulação de um material não estruturado para a aprendizagem de frações equivalentes. Esta atividade enquadra-se no domínio Números e Operações e no conteúdo Números Racionais Não Negativos, tinha como objetivos específicos: Compreender e usar um número racional como quociente, relação parte-todo, razão, medida e operador; Representar sob a forma de fração um número racional não negativo; Identificar e dar exemplos de frações equivalentes a uma dada fração.

A sessão iniciou-se com a leitura em voz alta do enunciado da tarefa, que se denominava *"Tiras e Dobras"* (Apêndice XIII), nesta tarefa os alunos tinham de fazer diversas dobragens, para que de acordo com esse número representassem as partes de cada tira e posteriormente em cada uma das alíneas, comparassem e fizessem trocas entre diferentes partes da unidade de acordo com as frações apresentadas.

Depois de feita a leitura e respetiva interpretação da tarefa, os alunos iniciaram a sua resolução a pares, foi-lhes dado cerca de 30 minutos para a pintura e dobragens das tiras, no entanto, foi sugerido inicialmente por um dos alunos que, dividissem as tiras igualmente pelo par, assim e segundo este aluno, cada um teria de fazer a dobragem de 3 tiras de acordo com as instruções que constavam na folha da tarefa.

Após algumas tentativas, alguns alunos demonstraram que não estavam a conseguir dobrar as tiras equitativamente de acordo com as partes que lhes era pedido na tarefa.

Assim, a investigadora aproveitou para realizar um momento coletivo de discussão, recorrendo a um exemplo, com o objetivo de esclarecer as dúvidas de alguns alunos e também verificar as estratégias utilizadas por outros. Como se pode verificar em seguida através de algumas transcrições:

"P"-Ao dobrarem a tira azul clara ao meio, quantas partes encontraram?

"A.C"- Duas, professora.

"P"- Sim, e como podemos representar cada uma delas?

"A. R"- Cada uma é metade da tira.

"P"- E como podemos escrever metade sem ser dessa forma?

"A. N"- Podemos escreve em fração, $\frac{1}{2}$.

"P"- Como se lê esta fração?

"A. D"- Lê-se um meio.

"P"- Alguém sabe outra forma de representar metade?

"A. M"- Sim, 0,5.

"P"- Sim, e se quisemos representar em percentagem? Como ficaria?

"A. T"- 50%.

"P"- Então, 50% representa que fração?

"A. P"- Representa $\frac{1}{2}$.

"P"- Então quando dividirem a tira azul ao meio que fração tem de escrever em cada uma das partes?

"A. M"- temos de escrever um meio em cada parte.

Passado alguns minutos, a investigadora ao circular pela sala verificou que os alunos que, tinham de dividir a tira vermelha estavam a sentir bastante dificuldade, pois não o estavam a fazer equitativamente e todos eles chegaram à mesma conclusão. Alguns já estavam a trabalhar com o seu par, para encontrarem estratégias para a resolução do problema. Então a investigadora aproveitou para realizar mais um momento coletivo de discussão, recorrendo à inquirição dos alunos sobre o que teriam de fazer, como se pode verificar pelos registos em seguida transcritos:

"P"- A tira vermelha depois de dobrada, quantas partes tem de ter?

"A. J"- tem de ter doze partes, professora.

"P"- sim, e então cada uma dessas partes a que fração corresponde?

"A. I"- cada uma é um doze avos da unidade.

"P"- E o que se terá de fazer à tira para ficarmos com doze partes iguais? Quantas divisões temos de fazer?

"A. J"- temos de dividir a unidade em 12 partes iguais.

"A.J"- cada parte tem de ter 1 cm, porque nós já dividimos.

"P"- E porque dizes isso? O que é que fizeram?

"A.J". Então nós medimos a tira inteira, que tinha 12 cm, como a tínhamos de dividir em 12 partes iguais, cada uma tem de ter 1 cm.

"P"- Muito bem, boa estratégia.

"P"- Alguém quer apresentar outra forma de resolver a tarefa?

"A. D"- Sim, podemos dizer nós. Então ao dividirmos a tira ao meio ficamos com 2 partes iguais, se continuarmos a dobrar cada uma das metades vamos ficar com 12 partes.

“P”- Sim, é verdade, mas então nesse caso quantas vezes terás de dividir a unidade para encontrares as 12 partes? Não te esqueças que no início divides ao meio e ficas com 2 partes, ou 2 metades...

“A.D”- Então, depois de ter essas 2 partes tenho de encontrar mais 10 partes.

“P”- Sim, mas isso é o número de partes que te faltam, não é o número de dobragens que tens de fazer…

“A.N”- Já sei professora, para ficar com 12 partes tenho de dobrar mais 5 vezes, porque antes já tinha dividido uma vez, e cinco mais uma são 6 vezes mas quando dobro ao meio é encontro o dobro das partes, 6x 2 é igual a 12 partes.

“P”- Então queres experimentar, para confirmares?

“A. D”- Sim, podemos dobrar.

“A.R”- Mas não vai dar, porque nós já fizemos assim e ficamos com 16 partes e não com 12.

“P”- Então o que temos de fazer depois de ficarmos com 2 partes iguais? Como vamos ter de dobrar essas 2 metades?

“A. C”- vamos ter de dobrar cada metade em 3 partes iguais, e no final com as partes juntas dobrar novamente ao meio.

“P”- então vamos novamente explicar aos colegas…

“P”- Quando no início dividimos a tira ao meio, encontrarmos metade da unidade. Em seguida vão dobrar a metade em 3 partes iguais, mas como as metades estão sobrepostas, cada parte fica dividida em seis partes iguais, quando abrirem a tira quantos pedacinhos tem a tira?

“A.I”- A tira tem 6 partes iguais, agora só falta dobrar mais uma vez, mas com a tira fechada, e assim vai dar o dobro dos pedaços… 12 partes.

“P”- Muito bem…

“P”- Reparem, todos conseguiram dobrar a tira rosa? Com quantas partes ela ficou?

“A. T”- Ficou com 6 partes iguais…

“P”- Então expliquem-me como fizeram a dobragem para ficarem com 6 partes…

"A. B"- Então dobramos a tira ao meio e ficamos com 2 partes iguais. Depois tivemos de dobrar cada uma das metades em 3 partes iguais. No final temos a tira dividida em 6 partes iguais. Cada parte é um sexto da unidade.

"P"- Muito bem. Então para encontrarmos as 12 partes da tira vermelha o que teríamos de fazer ainda?

"A.N"- Então depois dessas dobragens todas, se em seguida, dobrássemos novamente todas as partes juntas ao meio ficávamos com as 12, porque se já tínhamos seis, e multiplicarmos por 2 ficamos com 12.

No final os alunos conseguiram relacionar algumas partes das unidades, usando a comunicação verbal, através das representações em fração e número decimal, também a percentagem foi utilizada sobretudo para representa a metade, a quarta parte e o todo, como se pode verificar pelos registos em seguida transcritos:

"P"- A tira azul está dividida em 2 partes iguais, ou seja se eu ficar com uma parte da tira, fico com metade da unidade, sabem dizer-me como posso representar metade na forma decimal?

"A. J"- Fica zero virgula cinco, ou seja, ter metade ou ter 0,5 é o mesmo, a forma de escrever é que é diferente mas significa a mesma coisa.

"P"- Sim é verdade, mas não deves dizer coisa, mas sim quantidade, porque estamos a representar um valor.

"P"- E se quiser representar a fração 1/4 mas na forma decimal?

"A.N"- Se fosse 2/4 era o mesmo que ter metade, mas 1/4 é menos uma parte. É o mesmo que dividir a unidade em 4 partes iguais.

"P"- Sim, neste caso a unidade foi dividida em 4 partes iguais. Então quanto vale cada uma dessas partes?

"A.N"- Cada parte é um quarto e na representação decimal é 0,25, porque 0,25X 4 é igual ao todo que é 1, que é a unidade completa.

"P"- Muito bem. E como representamos o todo na forma de percentagem?

"A.B"- Representa-se 100%, metade é 50% e um quarto é 25%.

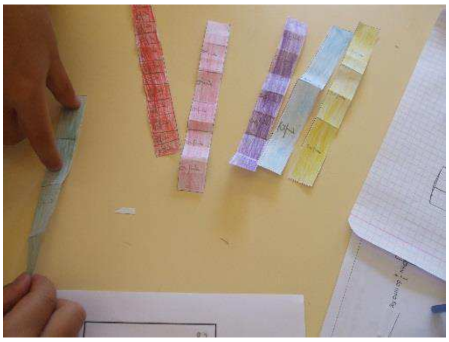


Imagem N.º 22 - Atividade tiras e dobras

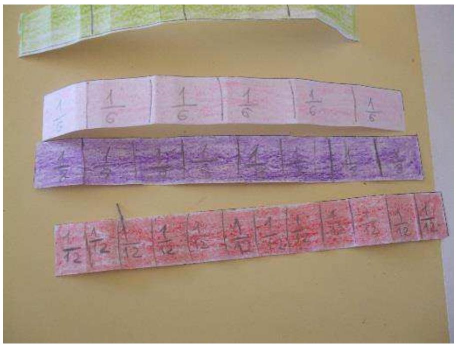


Imagem N.º 23 - Marcação de frações

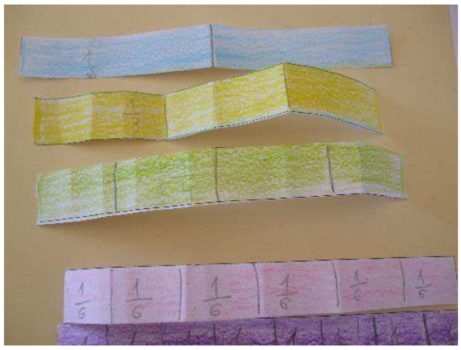


Imagem N.º 24 - Comparação de frações

Esta tarefa de natureza aberta revelou de imediato que, alguns dos alunos sentiram bastantes dificuldades na sua concretização. Essas dificuldades prenderam-se essencialmente ao nível das dobragens da tira vermelha, sendo que esta tinha de ficar dobrada em 12 partes iguais.

Pelo que foi anteriormente foi transcrito e observado pela investigadora e pela docente titular, os alunos compreenderam os resultados que tinham de alcançar, mas alguns não perceberam os procedimentos que tinham de realizar para dobrar corretamente a tira para que no final ficassem com 12 partes iguais.

Foi com base nessas dificuldades que se tornou necessário vários momentos de discussão coletiva em torna desta tarefa, ao longo da sua exploração os alunos foram questionados sobre as formas de representar uma determinada parte da unidade e sobre a forma como teriam de dividir a unidade equitativamente (contínua) de acordo com o que lhes era pedido em cada caso.

No entanto um dos pares de trabalho revelou possuir estratégias de dobragem diferentes dos restantes colegas, relativamente à tira vermelha, procedendo assim na fase final da sessão à comunicação oral da sua estratégia e de como chegaram aso resultado pedido, neste momento outros colegas tiveram oportunidade de apresentar relacionar as estratégias que estes colegas desenvolveram com processos de matemática pura, nomeadamente no tópico números e operações. Pois estes alunos utilizaram a régua para medir o comprimento da tira, depois dividiram o seu comprimento pelo número de partes que lhes era indicado como sendo a parte-todo. Verificaram assim que, cada dobragem tinha de medir 1 cm de comprimento.

Na tarefa 2, os alunos tinham de comparar e registar equivalências entre as tiras que apresentavam cores diferentes (imagem N.º 25), pois cada tira representava a unidade, mas o número de partes que as constituíam eram diferentes de tira para tira.

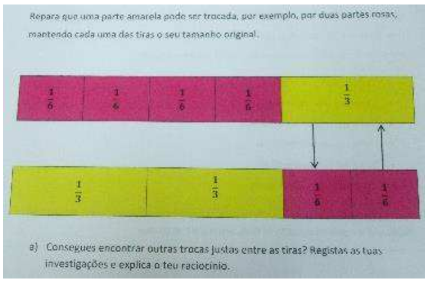


Imagem N.º 25 - Modelo da representação inicial

Através da análise da tarefa 2, verificou-se que todos os grupos usaram a linguagem verbal para exprimir essas relações, exceto um dos alunos que utilizou a representação em fração, para relacionar as diferentes tiras, como se pode verificar em seguida através das imagens N.º 28, 29, 30 e 31:

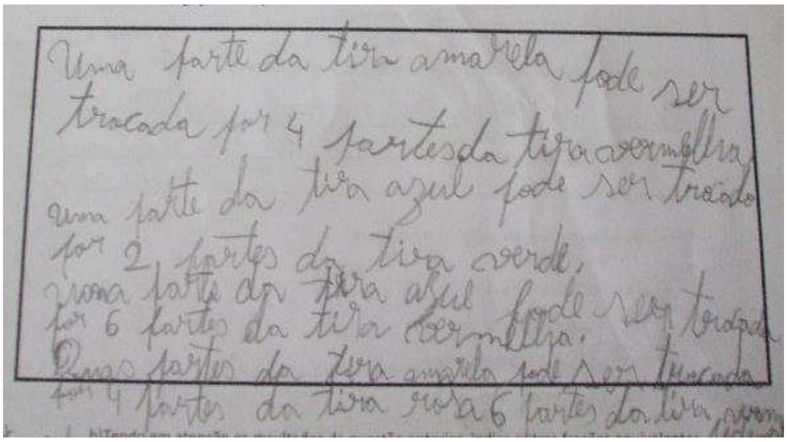
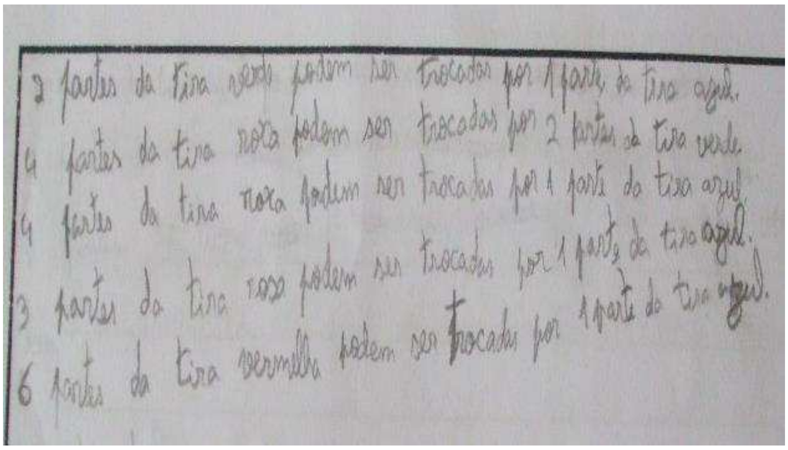
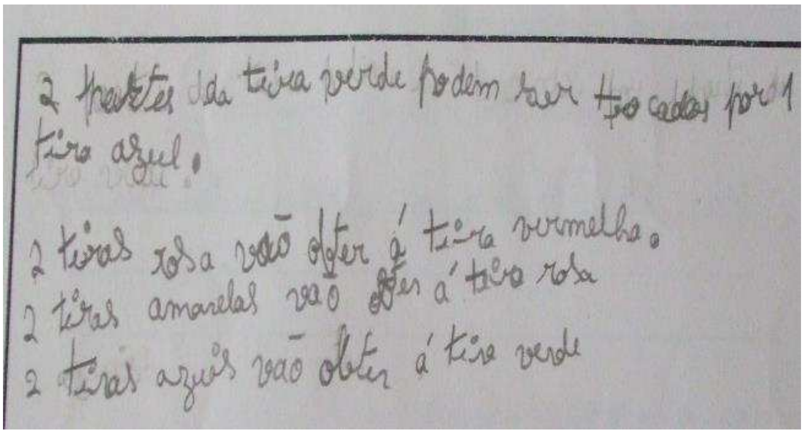


Imagem N.º 26 - Representação verbal



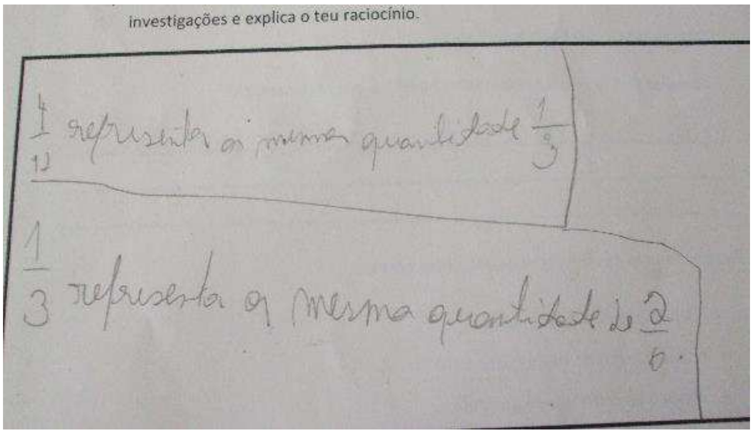
2 partes da tira verde podem ser trocadas por 1 parte da tira azul.
4 partes da tira rosa podem ser trocadas por 2 partes da tira verde
4 partes da tira rosa podem ser trocadas por 1 parte da tira azul
3 partes da tira rosa podem ser trocadas por 1 parte da tira azul.
6 partes da tira vermelha podem ser trocadas por 1 parte da tira azul.

Imagem N.º 27 - Representação verbal



2 partes da tira verde podem ser trocadas por 1 tira azul.
2 tiras rosa vão obter á tira vermelha.
2 tiras amarelas vão obter á tira rosa
2 tiras azuis vão obter á tira verde

Imagem N.º 28 - Representação verbal



investigações e explica o teu raciocínio.

$\frac{4}{12}$ representa a mesma quantidade $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ representa a mesma quantidade de $\frac{2}{6}$.

Imagem N.º 29 - Representação fração

Na alínea seguinte, os alunos tinham de indicar outras frações equivalentes, apesar de alguns pares terem revelado algumas dificuldades, acabaram por conseguir, com a ajuda e incentivo dos colegas e da investigadora, encontrarem relações sobretudo entre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, utilizaram sobretudo a representação simbólica através da fração, e conseguiram comparar as frações anteriormente mencionadas, como se pode verificar em seguida pelas imagens que se seguem:

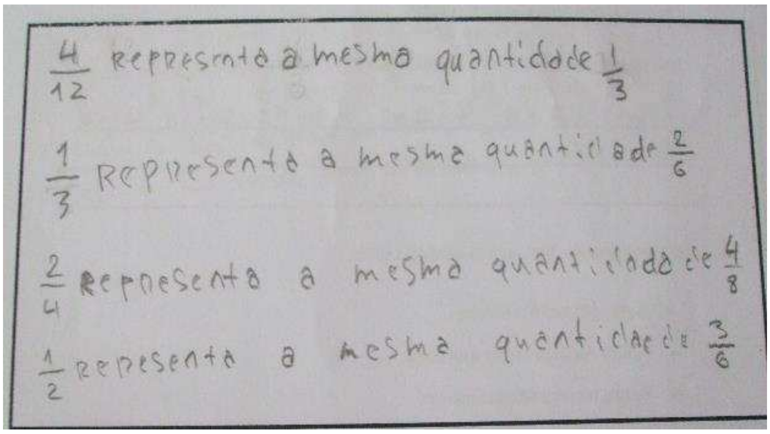


Imagem N.º 30 - Representação fração

No entanto, 1 dos pares destacou-se pelas relações e explicações que apresentaram nesta tarefa, como se pode verificar pelas transcrições que em seguida são apresentadas:

O par "*A.D*" e *"A.M"* além das representações anteriormente referidas, ainda conseguiu relacionar que a fração *"um terço é o dobro de* $\frac{1}{6}$ *"*.(ver imagem N.º 33)

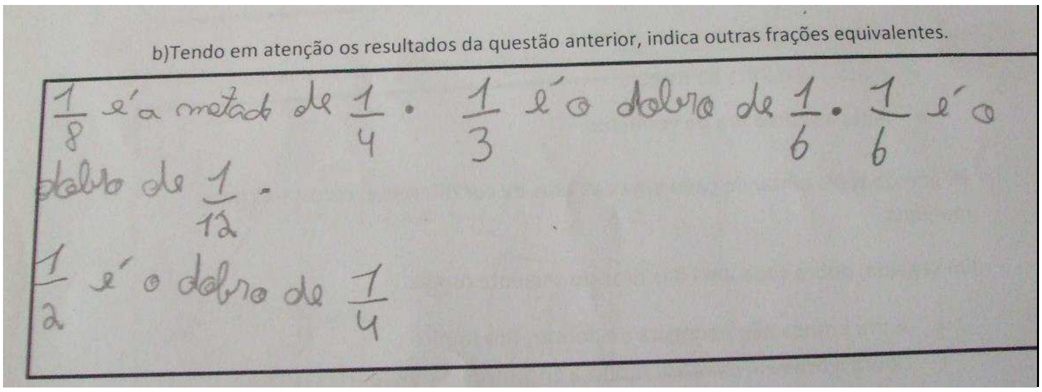


Imagem N.º 31 - Representação fração

Ao longo desta sessão a atividade da investigadora foi desenvolvida no sentido de clarificar e estimular os alunos para a adequação do seu trabalho exploratório, tendo por base a tarefa inicial que era uma tarefa aberta, sendo que, esta foi sem dúvida a tarefa onde os alunos revelaram maiores dificuldades.

Estas prenderam-se sobretudo com a divisão equitativa da unidade em 12 partes iguais, sendo que os alunos para a realizarem tinham de efetuar dobragens e a maioria não estava a perceber como as teriam de realizar.

Esta sessão foi marcada pela inquirição e o diálogo, que se manteve entre a investigadora e os alunos ao longo dos diversos momentos de trabalho coletivo e em pequeno grupo, sendo que este diálogo foi mais evidente após a transição do trabalho mais individualizado e se passou para um mais global. Os alunos desde o início que revelaram estarem à vontade para apresentarem e argumentarem as suas propostas uns com os outros, ao longo da sessão verificou-se uma evolução da utilização de termos próprios como é o caso na leitura de frações, na identificação das diferentes partes que constituíam o todo, sendo que existiam sete unidades continuas e cada uma delas era constituída por diferentes partes. Muitos dos alunos também foram capazes de relacionar a metade com a representação em fração, na forma decimal e através da percentagem. Estes conceitos foram sendo inquiridos e relacionados ao longo da exploração de cada uma das diferentes tiras. No final da sessão os alunos referiram que, gostariam de voltar a trabalhar utilizando este tipo de material e de trabalharem em grupo, pois referiram que, com a ajuda do colega podem trocar ideias e opiniões no momento em que estão a pensar e a selecionar estratégias para a resolução das tarefas e também quando já a estão a realizar, se não conseguirem sozinhos tem logo a ajuda do parceiro.

4.5 Análise e interpretação da 4ª Sessão- "Frações Equivalentes"

A quarta sessão teve a duração de 90 minutos. Esta sessão teve como principal objetivo a resolução da tarefa "Frações Equivalentes", esta foi realizada em grupos de 4 elementos. Nesta sessão pretendia-se que os alunos manipulassem um material estruturado para resolução de problemas onde a fração surge como medida num contexto contínuo, tendo assim de identificar a unidade de referência e a reconstrução da mesma. Estas tarefas enquadram-se no domínio Números e Operações e no conteúdo Números Racionais Não Negativos, tinha como objetivos específicos: Identificar a unidade de referência; Identificar e dar exemplos de frações equivalentes relativamente a uma dada fração.

A sessão iniciou-se com a manipulação do respetivo material pelos alunos, em seguida procedeu-se à leitura em voz alta do enunciado da tarefa, que se denominava *"Frações Equivalentes"* (Anexo3), nesta tarefa os alunos tinham de manipular e relacionar as diversas barras que constituem um conjunto de *cuisisnaire*, (10 barras, cada uma de cor diferente) em que os alunos tinham de comparar e fazer trocas entre diferentes unidades de acordo com os dados apresentados em cada situação específica.

Depois de feita a sua leitura e respetiva interpretação, os alunos iniciaram a resolução da tarefa em grupos de trabalho, no entanto, foi sugerido inicialmente por um dos grupos que, todos formassem um conjunto com as 10 barras, para poderem mexer e fazer as verificações à medida que iam resolvendo as tarefas.

Imagem N.º 32 - barras de cuisinaire

Após algumas tentativas, dois dos grupos de trabalho referiram que não estavam a conseguir resolver a tarefa 1, como se pode verificar através das transcrições que se seguem:

"P"-Na tarefa1, qual é a barra que tem de usar como unidade?

"A.D"- A barra laranja.

"P"- Sim, e o que diz em seguida para fazerem?

"A.D"- Temos de ver qual é a barra que tem $\frac{4}{5}$*?*

"P"- Quem sabe explicar melhor?

"A.P"- Professora, temos de ver qual é a outra barra que mede $\frac{4}{5}$ *do comprimento da barra laranja.*

"P"- Sim é isso, e porque é que é da barra cor de laranja?

"A.P"- Porque a laranja é que é a nossa unidade, que representa o todo.

"P"- Então a barra que vão procurar será maior, igual ou mais pequena que a barra laranja?

"A.P"- Acho que é mais pequena.

"P"- Então diz lá porquê.

“A.I”- eu sei professora, posso dizer.

“P”- Explica lá, então.

“A.I”- porque se mede 4 partes não chega ao tamanho da barra laranja que mede 5 partes, logo é mais pequena 1 parte.

“P”- alguém quer explicar por outras palavras?

“A.N”- então se nos colocarmos por cima barra laranja as barrinhas mais pequenas que valem 0,1, então a unidade tem 10 barrinhas brancas, em seguida se fizermos conjuntos com as barras brancas para encontrar qual é a barra que mede 4/5, ficamos com cinco conjuntos de 2 barras brancas. Mas como não queremos a unidade completa, retiramos 1 conjunto e ficamos com quatro. Em seguida vamos encontrar a barra castanha, que mede o mesmo dos 4 conjuntos de barras brancas.

Imagem N.º 33 - Comparação da unidade com as décimas

Imagem N.º 34 - Relação entre a unidade e a oitava parte

“P”- Quem sabe dizer outra fração que representa o mesmo valor de $\frac{4}{5}$ *?*

“A.J”- pode ser $\frac{8}{10}$*, porque representa a mesma medida, mas a unidade está dividida em 10 partes iguais e queremos encontrar a barra que mede 8 partes e encontramos há mesma a barra castanha.*

“P”- Na questão inicial em quantas partes está a unidade dividia?

“A.R”- Está dividida em 5 partes iguais.

“P”- Então qual será a cor da barra que nos permite dividir a barra laranja em cinco partes iguais?

"A.P"- é a barra vermelha, nós já experimentamos. Se juntarmos 5 barras vermelhas encontramos a barra laranja que é igual à nossa unidade.

Imagem N.º 35 - Relação entre a unidade e a quinta parte

"P"- Qual é o comprimento de cada barra vermelha?

"A.L"- Cada uma mede 2 cm.

"P"- Cada barra vermelha que fração representa em relação à unidade?

"A.L"- Representa uma parte das cinco que formam a unidade.

"P"- Como se representa na forma de fração?

"A.J"- Em fração fica 1 sobre 5, $\frac{1}{5}$.

Alguns alunos colocaram 10 barras brancas sobrepostas à unidade, verificaram que cada um deles era uma décima parte do todo. Assim perceberam que $\frac{2}{10}$ era o mesmo que $\frac{1}{5}$. Em seguida, foram procurar a barra que representava $\frac{8}{10}$ da barra laranja, chegaram assim à barra castanha.

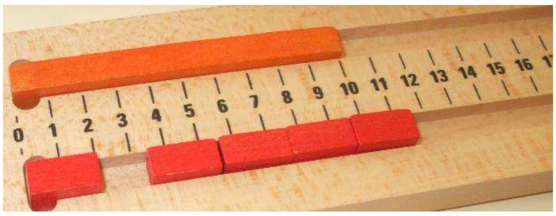


Imagem nº 36 - Relação entre a unidade e a quinta parte

Alguns alunos foram capazes de relacionar o quíntuplo como sendo o dobro da décima parte. Referiram que ao dividirem a unidade em cinco partes iguais, estavam a trabalhar com a quinta parte, quando a dividiam em 10 partes iguais estavam a trabalhar com a décima parte. A quinta parte valia o dobro da décima parte porque cada cubinho branco era metade dos cubinhos vermelhos.

Na resolução da tarefa 2 os alunos sentiram-se mais confiantes, iniciaram-na sem revelarem qualquer dúvida nos procedimentos que inicialmente teriam de realizar.

Quando lhes foi pedido para comunicarem oralmente o que tinham de fazer alguns dos alunos referiram o seguinte:

"A.D"- A unidade agora é a barra amarela, e temos de encontrar a barra que represente $\frac{4}{5}$ *desta unidade.*

"A.D"- vamos colocar a barra rosa que mede 4 cm e representa a quarta parte da nossa unidade que mede 5 cm.

Imagem N.º 37 - Relação entre a barra castanha e a rosa

"P"- E o que representa a barra amarela em relação à barra laranja?

"A.R"- Representa metade da barra laranja, ou $\frac{1}{2}$.

"P"- Lembram-se que barra representava $\frac{4}{5}$ *da barra laranja?*

"A.J"- Era a barra castanha.

"P"- então se amarela é metade da laranja, o que tem de encontrar relativamente à barra castanha?

"A.N"- eu acho que sei, temos de encontrar metade da barra castanha, que é a barra rosa.

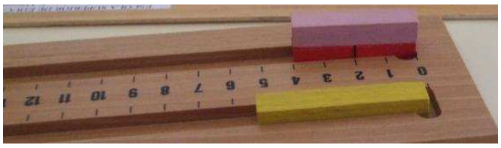


Imagem nº 38 - Relação da barra amarela com a rosa e com a vermelha

"P"- Muito bem e o representa a barra rosa em relação à unidade?

"A.N"- representa 4 das cinco partes da barra amarela, ou seja $\frac{4}{5}$.

A maior parte dos alunos não revelou qualquer dificuldade na identificação da unidade de referência, e foi capaz de a reconstruir a partir da metade e também através da parte mais pequena, as décimas, pois relacionou o seu comprimento (5 cm) com cinco decimas (a barra amarela). Mas como o que era pedido, era a quarta parte, os alunos compreenderam que tinham de encontrar a barra com o valor de 4 cm, chegando assim à barra rosa, como se pode verificar pela imagem 38. A maior parte dos alunos utilizaram a régua graduada para resolver a tarefa.

Na tarefa 3, os alunos a partir da barra verde-claro que representava uma parte da unidade, tinham que identificar o todo a que esta correspondia.

Os alunos de imediato agarraram na barra verde-claro, pois esta representava três das quatro partes que representavam a unidade. Em seguida, procuraram a respetiva barra que representava $\frac{4}{4}$, encontraram assim a barra rosa. Alguns relacionaram ainda a unidade com a sua metade, encontrando assim a barra vermelha, como se pode verificar através das imagens N.º39 e N.º 40.

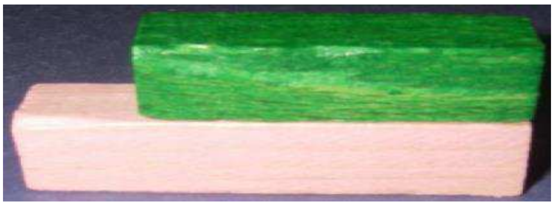


Imagem N.º 39 - Comparação da fração indicada

Imagem N.º 40 - Relação entre a unidade e a sua metade

Quando questionados, qual era a barra que representava a metade da metade, alguns alunos referiram o seguinte:

"A.M"- Metade da metade, representa a fração $\frac{1}{4}$, então temos de procurar a barra que mede 1 cm, porque a unidade mede 4 cm e se queremos encontrar a quarta parte, temos de dividir 4 por 4 que dá 1 cm.

"P"- Muito bem, e qual é a barra que encontraram como sendo a quarta parte da barra rosa?

"M"- É a barra branca.

"P"- Quantas barras brancas são necessárias para formar uma unidade igual a barra rosa?

"A.I"- São necessárias quatro barras brancas para formar uma unidade igual à barra rosa.

"P"- Que barra representa a terça parte da barra rosa?

"A.D"- É a barra verde-claro, porque como já vimos no início, se a unidade mede 4 cm a barra que mede 3 cm de comprimento é a verde-claro, que representa a fração $\frac{3}{4}$.

A manipulação das barras de *Cuisinaire* verificou-se muito eficaz na aprendizagem e comparação de frações, pois este material permite uma enorme diversidade de unidades de referência, é de fácil manipulação e permite a confirmação imediata das conjeturas e conexões que os alunos realizaram na resolução das tarefas apresentadas. É também um material que permite trabalhar em diferentes contextos, ou seja, permite a comparação de frações como medida de comprimento e a reconstrução da unidade torna-se assim facilitada, pois os alunos conseguem visualizar concretamente as partes que constituem o todo.

4.6 Análise do impacto da implementação do plano de ação – T.A.D.

A quinta sessão teve a duração de 90 minutos. Esta sessão teve como principal objetivo a resolução de problemas (Apêndice VIX), utilizando unidades continuas e unidades discretas, esta foi realizada individualmente, para se perceber se houve ou não evolução relativamente aos conteúdos até aqui trabalhados. Nesta sessão pretendia-se que os alunos resolvessem uma cadeia de problemas onde a fração surge como representação de diferentes grandezas.

Estas tarefas enquadram-se no domínio Números e Operações e no conteúdo Números Racionais Não Negativos, tinham como objetivos específicos: a resolução de problemas com unidades contínuas e discretas; representação, ordenação e comparação de frações equivalentes na reta numérica.

A sessão iniciou-se com a leitura em voz alta do enunciado das tarefas, depois de feita a sua leitura e respetiva interpretação, os alunos iniciaram as suas resoluções individualmente.

Tarefa 1- unidade continua				
Resultados	**Alínea 1.1**	**Alínea 1.2**	**Alínea 1.3**	**Alínea 1.4**
CT	15	13	13	10
CP	0	0	2	3
NC	0	2	0	2

Tab. N.º 14 - Resultados problema 1

Ao analisarmos a tabela N.º14, pode-se verificar que todos os alunos (15) concretizaram a alínea 1.1, subentende-se que a interpretação do enunciado deste problema foi completa, todos eles utilizaram nas suas resoluções as representações icónicas e simbólicas.

Tarefa 2- unidade discreta		
Resultados	**Alínea 2.1**	**Alínea 2.2**
CT	14	14
CP	1	1
NC	0	0

Tab. N.º 15 - Resultados problema 2

Ao analisarmos a tabela N.º 15, podemos verificar que 14 dos alunos concretizaram as duas alíneas que faziam parte deste problema. Somente 1 aluno o concretizou parcialmente. Podemos relacionar este facto com o sucesso na interpretação do enunciado do problema. Também 14 dos alunos utilizaram nas suas resoluções as representações icónicas e simbólicas, somente 1 dos alunos utilizou na sua resolução somente a representação simbólica.

Tarefa 3- Frações equivalentes		
Resultados	**Alínea 3.1**	**Alínea 3.2**
CT	13	13
CP	2	2
NC	0	0

Tab. N.º 16 - Resultados problema 3

Ao analisarmos a tabela N.º 16, podemos concluir que a maioria dos alunos não revelou dificuldades na resolução dos problemas com frações equivalentes, 13 alunos concretizaram com sucesso as duas alíneas, nas quais tinham de marcar no percurso apresentado as frações que cada um dos participantes já tinha percorrido, neste problema foram apresentadas frações com diferentes denominadores e outras com denominadores iguais, no final tinham de relacionar as partes percorridas com a unidade que neste caso foi o quilómetro.

Verificou-se que os alunos perceberam de imediato que apesar das frações apresentarem denominadores diferentes representavam a mesma distância, e assim tinham de observar o percurso de forma diferente, ou seja, dividi-lo em cinco partes iguais e depois em dez partes iguais, assim realizaram as suas marcações e relacionaram as diferentes frações com o total do percurso, apresentando assim os valores percorridos pelos participantes.

Capítulo IV- Considerações finais, limitações do estudo e sugestões para futuras investigações

1. Considerações finais

Como já foi referido inicialmente, o presente estudo surgiu da necessidade de aprofundar os conhecimentos sobre o processo de ensino aprendizagem dos números racionais no ensino básico, mais concretamente no 3º ano de escolaridade, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, procurou-se assim dar resposta aos objetivos definidos para esta investigação:

- Identificar as representações usadas pelos alunos na aprendizagem dos números racionais.
- Identificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais não negativos.
- Caracterizar metodologias que contribuam para melhorar o ensino e a aprendizagem dos números racionais.

Durante o período da Prática de Ensino Supervisionado da investigadora foi aplica uma sequência de tarefas que foi adaptada por esta, tendo em conta o enquadramento teórico do estudo, o atual Programa de Matemática para o Ensino Básico e respetivas Metas de aprendizagem, baseou-se também na ideia de matematização progressiva defendida por *Gravemeijer* (1994).

As tarefas privilegiaram a exploração de situações devidamente contextualizadas de forma intuitiva, com recurso a materiais manipulativos que auxiliaram a modelação matemática e a construção de esquemas mentais. A linguagem e a simbologia foram desenvolvidas de forma natural, partindo dos contextos apresentados e da linguagem utilizada pelos alunos no seu dia-a-dia.

Seguidamente serão apresentadas as principais conclusões em função dos objetivos definidos, da revisão da literatura e dos dados fornecidos na entrevista pela professora titular.

Relativamente ao 1º objetivo definido para este estudo, através do qual se pretendia **identificar as representações usadas pelos alunos na aprendizagem dos números racionais,** podemos afirmar que, através dos dados recolhidos quer na análise das suas produções, juntamente com as observações feitas pela investigadora ao longo das diversas sessões e com o cruzamento dos dados fornecidos pela docente titular na entrevista facultada à investigadora, em que esta refere que os alunos *"Inicialmente utilizam as representações pictóricas e posteriormente a introdução da representação matemática."* Acrescentando ainda *"Como* *qualquer grupo, denota-se um caráter heterógeno ao nível da aquisição, compreensão e aplicação dos conteúdos, pelo que há alunos que apreendem mais facilmente do que outros."*

A maioria dos alunos inicialmente privilegiava as representações ativas (manipulação de materiais didáticos, figuras, outros objetos) e em seguida transpunha essas aprendizagens utilizando as representações icónicas. Á medida que as tarefas foram sendo aplicadas e a partilha de estratégias e de conhecimentos foi acontecendo, os alunos ganharam confiança e em simultâneo foram gradualmente alterando as suas representações no que diz respeito às tarefas com frações, passando assim a maioria a utilizar as representações icónicas juntamente com as simbólicas.

Na última sessão, alguns dos alunos utilizaram nas suas representações uma linguagem unicamente matemática, recorrendo a símbolos e termos próprios dos números racionais. No que diz respeito à forma que a maioria dos alunos apresentava os números racionais, a maioria privilegiou a representação na forma de fração, embora nalgumas tarefas tivessem oportunidade de escolher outras representações e lhes tenha sido solicitado pela investigadora, mas a maioria sempre que podia privilegiava a representação na forma de fração.

Relativamente ao segundo objetivo definido para este estudo, através do qual se pretendia **identificar as dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais**, podemos afirmar que grande parte dos alunos não reconhecia nem sabia ler uma fração, nem conheciam o significava desse termo. Durante a 1ª sessão que foi dedicada sobretudo a este conceito, a maioria dos alunos, no seu final consegui ultrapassar esta dificuldade. Outra dificuldade prendeu-se com a comparação de frações, a maioria dos alunos referia que $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, esta situação deveu-se ao facto dos alunos transporem as regras aprendidas para os números inteiros e aplicando-as aos números racionais, assim como o número 4 é maior que o 3, são induzidos em erro.

Ao contextualizar-se tarefas desta natureza com situações que os alunos conhecem do seu dia-a-dia, estes conseguem compreender efetivamente o conceito de fração e também realizar a sua comparação e ordenação.

De acordo com *Streefland* (1991) que refere a importância em trabalhar desde cedo os termos próprios das frações (metade, um terço, um quarto, etc.), pois inicialmente os alunos utilizam nas suas resoluções representações verbais e pictóricas, nomeadamente desenhos ou esquemas, que servem de base a estratégias que permitem a ligação entre a interpretação da informação do enunciado e a respetiva solução, estratégias estas que permitem aos alunos desenvolverem competências neste domínio, como se pode verificar que aconteceu neste estudo.

No entanto, estas dificuldades também foram referidas na entrevista que a docente concedeu na fase inicial deste estudo, em que esta ao referir-se sobre este assunto diz que *"As dificuldades são no âmbito da compreensão que condicionam a exploração da temática. A capacidade de abstração dos alunos desta faixa etária, em regra geral, não é a necessária para a aquisição e apreensão dos referidos conteúdos".* Referindo ainda que *"As dificuldades concentram-se na complexidade abstrata da temática, pelo que a abordagem deverá consistir numa exploração ao nível do operatório concreto."*

Neste caso a dificuldade que gerou maior impacto foi sem dúvida as tarefas referentes às frações equivalentes, e como também foi referido na entrevista pela docente sobre este conteúdo *"As dificuldades estão no âmbito da compreensão que condicionam a exploração da temática. A capacidade de abstração dos alunos desta faixa etária, regra geral, não é a necessária para a aquisição e apreensão dos referidos conteúdos."*

Assim decidiu-se utilizar nestas sessões uma breve exploração de situações com a devida contextualização para que os alunos compreendessem o significa equivalência. No entanto, uma coisa é a teoria outra é a prática, e somente com a utilização de materiais manipuláveis os alunos compreenderam efetivamente o conceito de frações equivalentes. Este foi um conteúdo trabalhado ao longo de várias sessões com recurso a diversos materiais e com várias dinâmicas de aula (trabalho a pares, grupos de 4 elementos e individualmente).

Na última sessão, todos os alunos conseguiram concretizar o problema apresentado para este conteúdo, não utilizaram nenhum material didático na sua realização, pois nenhum revelou necessidade, embora o tivessem disponível na sala de aula.

Através do terceiro objetivo definido para este estudo, pretendia-se caracterizar **metodologias que contribuíssem para melhorar o ensino e a aprendizagem dos números racionais**.

Pode-se referir em primeiro lugar que, o recurso a matérias manipuláveis pelos alunos foi sem dúvida uma excelente estratégia de ensino, pois verificou-se ser de extrema importância no processo de aprendizagem dos números racionais. Estes materiais quando são manipulados efetivamente pelos alunos, normalmente numa dinâmica de trabalho de pares ou de grupo são de facto relevantes, pois permitem que os alunos testem e verifiquem resultados de uma forma efetiva evitando assim cair em situações abstratas, que numa fase inicial do seu percurso escolar podem traduzir-se num grande *handicap* e conduzir ao insucesso escolar.

Verificou-se também que, a utilização de materiais didáticos em simultâneo com o ensino exploratório permitiram que os alunos atuassem positivamente, tendo uma postura de maior confiança relativamente ao que iriam responder às questões colocadas e havendo uma maior motivação na realização das tarefas propostas. Os alunos quando confrontados com o facto de utilizarem um determinado material na realização de uma determinada tarefa ficaram contentes, porque *"gosto de os usar"*, ou porque *"é divertido usar os materiais"*, ou porque *"não vai ser tão aborrecida a aula".* Aquando da aplicação das tarefas realizadas, juntamente com o auxílio dos materiais utilizados, foi notório o entusiasmo e motivação que os alunos tinham por fazerem novas descobertas com a ajuda dos materiais disponibilizados, pois, como afirma Botas (2008, pág. 12), "*os materiais constituem o suporte físico através do qual as crianças vão explorar, experimentar e manipular"*, havendo assim interesse e motivação na utilização dos diferentes materiais e também um maior empenho no desempenho das tarefas, facilitando assim as suas aprendizagens.

Na realização das tarefas com frações equivalentes, as barras de *Cuisenaire* foram entregues aos alunos, que tiveram a oportunidade de explorarem livremente este material durante algum tempo, observou-se que todos os alunos ficaram curiosos e entusiasmados com manipulação deste material, referiram que se tratava de um material muito pouco utilizado por eles nas aulas. No entanto, o impacto foi bastante positivo, os alunos estavam ansiosos por explorá-lo e perceber o que poderiam fazer com as barrinhas coloridas. Devido à facilidade de aprendizagem e construção de conhecimento a que estes materiais auxiliam, notou-se um impacto positivo na comparação e equivalência de frações. Pode confirmar-se que os alunos progrediram com a ajuda dos materiais utilizados, uma vez que eram materiais que os levavam para um contexto real, dando-lhes significado.

Pode-se assim concluir e validar mais uma vez, através do cruzamento dos dados fornecidos pela docente na entrevista e também na revisão da literatura, que uma metodologia exploratória com recurso a materiais didáticos influencia positivamente o ensino e a aprendizagem desta temática nomeadamente no 1º Ciclo do Ensino Básico.

Este estudo obedeceu a uma metodologia de investigação-ação, assim permitiu contribuir para melhorar o meu desempenho como professora. Pois o professor ao agir como investigador não desempenha só os seus deveres profissionais, mas também se observa a si próprio tendo uma visão mais ampla do que se está passar, como é referido por *Bogdan e Biklen* (1994).

Este estudo permitiu também uma reflexão mais profunda sobre a eficácia das estratégias utilizadas, assim como os processos usados pelos alunos e as dificuldades que estes apresentaram no desenvolvimento do sentido de número racional. Deste modo foi possível aumentar a minha compreensão e adequar a minha atuação ao longo deste estudo. Citando Oliveira e Serrazina (2002, p.39) *"A reflexão pode abrir novas possibilidades para a ação e pode conduzir a melhoramentos naquilo que se faz"*, tendo sido esta a questão impulsionadora da escolha do meu estudo, devido à sua pertinência e à necessidade pessoal que senti enquanto futura docente, devo referir que julgo ter terminado esta etapa bastante exigente de uma forma positiva, quer no que diz respeito à minha prestação e atuação ao longo das demais sessões bem como com o término deste trabalho académico, no qual foram identificas algumas questões básicas referentes ao desenvolvimento de número racional no 1º ciclo do ensino básico, como se pode verificar através dos resultados observados neste estudo.

Pode-se ainda desmistificar um pouco a ideia de que existem dificuldades intransponíveis associadas ao desenvolvimento do sentido de número racional, nos primeiros anos de escolaridade, ou seja, dificuldades existem, mas também há forma destas serem contornadas, sobretudo através da natureza das tarefas, estas devem ser significativas para os alunos e abordando metodologias que sejam propícias a esta temática, como é o caso do ensino exploratório, como é defendido por *Hunting, Sharpley, Bezuk e Streefland* (1991), em que referem que a introdução dos números racionais deve ser feita nos primeiros anos de escolaridade desde que seja acompanhada de materiais manipulativos.

Termino salientando que, cabe ao professor ter imaginação e criatividade para adaptar objetos do dia-a-dia ou usar materiais comprados para criar aulas mais dinâmicas, de caráter lúdico e formal em simultâneo, tornando-se, assim as aulas mais apelativas para os alunos e que estas sejam facilitadoras de aprendizagens como é o caso dos números racionais não negativos.

2. Limitações

O presente estudo apresenta sem dúvida algumas limitações, nomeadamente o facto de se cingir apenas a um grupo de alunos, não sendo assim possível fazer comparações e generalizações relativamente aos resultados obtidos.

O facto de os alunos por vezes terem trabalhado em pares ou em grupos, poderá ter contribuído para os resultados observados nas respetivas tarefas, sendo que não me foi possível continuar a desenvolver mais tarefas para poder validar se os alunos efetivamente melhoraram as suas aprendizagens nomeadamente no que diz respeito às frações equivalentes.

O processo de análise de dados revelou-se muito exigente, pois a sua natureza qualitativa e a elevada extensão das tarefas obrigaram a uma análise atenta e repetida para se conseguir estabelecer algum tipo de relação e assim tecer conclusões.

3. Sugestões

Considero que este estudo, também possa contribuir para facilitar o papel dos docentes do 1ºciclo do ensino básico, no desenvolvimento do sentido de número racional, na medida em que apresenta uma experiência de ensino com resultados positivos.

Considero também, que seria importante a realização de mais estudos sobre esta temática em níveis de escolaridade mais elevados, para analisar o desempenho dos alunos que anteciparam o desenvolvimento de sentido de número racional, tornando-se assim possível, o esclarecimento efetivo de se utilizar metodologias específicas e na aplicabilidade destas a conteúdos específicos.

Referências bibliográficas

Abrantes, P, Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). A Matemática na Educação Básica. Ministério da Educação. Lisboa: Departamento da Educação Básica;

Aires, L. (2011). Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional. Lisboa: Universidade Aberta

Alves, C. & Morais, C. (2006). Recursos de apoio ao processo de ensino e aprendizagem da matemática, pp. 335-349. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca & P. Canavarro (Orgs.), Números e álgebra: na aprendizagem da matemática e na formação de professores (pág. 197 – 212). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação – Secção de Educação Matemática. (http://hdl.handle.net/10198/1087).

Anghileri, J. (2001). *A study of progression in written calculation strategies for division. In British Journal of Learning Support*, vol 16, nº1 (pp 17-22).

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). *Rational number concepts. In* R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.91-125). New York, NY: Academic Press.

Bento, A. (2012). Investigação quantitativa e qualitativa: dicotomia ou complementaridade. Madeira: Universidade da Madeira. Consultado em dezembro de 2014, disponível em http://www3.uma.pt/bento/Repositorio/Investigacaoqualequan.pdf.

Bívar, A., Grosso, C. (2013). Programa e Metas Curriculares Matemática Ensino Básico. Ministério da educação e ciência. Disponível em

http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf

Boavida, A., *et al.* (2008). A experiência Matemática no Ensino Básico − Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Lisboa: DGIDC.

Bogdan, R. & Biklen S., (1994). Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Boldrin, M. (2009). *Barrinhas de Cuisenaire: Introdução à construção dos fatos fundamentais da adição*. São Paulo. Consultado em janeiro de 2015, disponível em http://pedagogiafmu.files.wordpress.com/2010/09/barrinhas-de- cuisenaire-introducao-a-construcao-dos-fatos-fundamentais-da-adicao1.pdf~

Botas, D. (2008). A utilização dos materiais didácticos nas aulas de Matemática. Lisboa: Universidade Aberta.

Bruner, J. (1999). Para uma Teoria da Educação. Lisboa: Relógio D´Água.

Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C., (2004*). Fracciones y números racionales positivos em Godino*, J. D. (Org.) *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. (pp.221-237) Granada: *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada*. Retirado em 10 de dezembro de 2014 de http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm.

Cavalcanti, C. T. (2001). *Diferentes formas de resolver problemas. In* K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas. Habilidades básicas para aprender matemática* (pág. 121 – 149). Porto Alegre: Artmed.

Cramer, K., Behr, M., Post T., Lesh, R., (2009) *Rational Number Project: Initial Fraction Ideas*. Retirado em 28 dezembro 2014 de
http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/rnp1-09.html.

Contente, I. (2012). A utilização de materiais didáticos no ensino da matemática do 1º ciclo do Ensino Básico. Beja: Instituto Politécnico de Beja. Consultado em fevereiro de 2015, disponível em
http://comum.rcaap.pt/bitstream/123456789/3910/1/Estudo_Contente_2012.pdf.

DEB. (2004). Organização Curricular e Programas Ensino Básico- 1º Ciclo. Lisboa: Ministério da Educação.

DEB. (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação.

Diniz, M. I. (2001).*Resolução de problemas e comunicação. In* K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática* (pág. 87- 97). Porto Alegre: Artmed

Fernandes, D. (1991). Notas sobre paradigmas de investigação em educação. *Noesis,* (18), 64-66.

Fosnot, C. & Dolk, M. (2002). *Young mathematics at work: Constructing Fractions, Decimals, and Percents*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Freire, P, (s.d.). Educação como prática da liberdade. Lisboa: Editora Dinalivro.

Freudenthal, H (1991). *Revisiting mathematics education*: China lecteures. Dordrecht: Kluwer.

Gil, António Carlos. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 5.ed. São Paulo: Atlas, 1999. 202 Pág. ISBN: 8522422702.

Godino, J. D. (Director) (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. *Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada*. ISBN: 84-933517-1-7.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-β Press/ Freudenthal Institute.

Gravemeijer, K. (2005). *What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In* L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Hall, P. (2007). *Amostragem: Desenho e Procedimentos*. (Documento www. URL: http://www.estgv.ipv.pt/PaginasPessoais/malva/EstudosMercadoI/aulasMinhas/capítulo%2011.pdf).

Mendes, Fátima (2010). Números e Operações 3º ano.

Monteiro, C., Pinto, H. (2007) Desenvolvendo o sentido do número racional. Associação de professores de Matemática. Lisboa: APM.

Oliveira, I. & Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In Reflectir e investigar sobre a prática profissional (pp.30-42). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Owens, D. T. (1993). *Teaching and learning decimal fractions. In* D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 159-178). Reston: NCTM.

Pardal, L. & Correia, E. (1995). Métodos e técnicas de investigação social. Porto: Areal Editores.

Pinto, M. e Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.° ano de escolaridade. Évora: Departamento de Pedagogia e Educação.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. *In* GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J.P. (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1999). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, 7 (2), 41-70.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). *Curriculum implications of Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts. In* T. Carpenter, E. F& Harel, G. *(In press). Designing instructionally relevant assessment reports. In* T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Research on the Learning, Teaching, and Assessing of Rational Number Concepts*. Lawrence Erlbaum and Associates. Retirado em 05 de janeiro de 2015 de http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/93_6.html.

Post, T., Cramer, K., Harel, G., Kiernen, T., & Lesh, R. (1998) *Research on rational number, ratio and proportionality. Proceedings of the Twentieth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. PME-NA XX Volume I (pp. 89-93). Raleigh, North Carolina.

Quivy, Raymond; Luc Van Campenhoudt (1998), *Manual de investigação em ciências sociais*. Lisboa: Gradiva.

Kemmis, Stephen e McTaggart, Robin. *Cómo planificar la investigación-acción.* Barcelona: Editorial Alertes, 1988.

Kieren, T. E. (1976). *On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers*. *In* R. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101–150). Columbus, OH: Eric/SMEAC.

Kieren, T. E. (1993). *Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding*. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49 -84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Simon, M. (1995). *Reconstruction Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 114-145.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A paradigma of developmental reseach.* Dordrecht: Kluwer.

http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/T11_IR_Mathematics_FullBook.pdf acedido em 14-02-15.

Woleck, K. (2001). *Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings*. In A.Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics — 2001 Yearbook* (pp. 215– 227). *Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics*.

Vale, I. & Pimentel, T. (2004). *Resolução de Problemas* (p.7-52). In Pedro Palhares (Ed.), *Elementos de Matemática para professores do ensino básico.* Lisboa: Lidel – Edições Técnicas, Lda.

Vieira, C. (1995). *As técnicas quantitativas e qualitativas de recolha de dados: provas de aptidão pedagógica e capacidade científica*. Coimbra: Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação.

Yin, Robert (1993). *Case Study Research: Design and Methods* (2ª Ed) Thousand Oaks, CA: *Sage Publications*

Tenreiro−Vieira, C. (s. d.) *Promover a Literacia Matemática dos Alunos: Resolver problemas e investigar desde os primeiros anos de escolaridade*. Vila Nova de Gaia: Editora Educação Nacional

Apêndices

Apêndice I - Tabela 1- Conteúdos números

<table>
<tr><th>Conteúdos</th><th>Metas</th></tr>
<tr><td><u>Números racionais não negativos</u>
- Fração como representação de medida de comprimento e de outras grandezas; numerais fracionários;
- Representação de frações na reta numérica;
- Frações equivalentes e noção de número racional;
- Ordenação de números racionais representados por frações com o mesmo numerador ou o mesmo denominador, ou utilizando a reta numérica ou a medição de outras grandezas;
-Frações próprias;</td><td rowspan="3">- Medir com frações
- Adicionar e subtrair números racionais
- Sistema de numeração decimal
- Resolver problemas</td></tr>
<tr><td><u>Adição e subtração de números racionais não negativos representados por frações</u>
-Adição e subtração na reta numérica por justaposição retilínea de segmentos de reta;
- Produto de um número natural por um número racional representado por uma fração unitária;
- Adição e subtração de números racionais representados por frações com o mesmo denominador;
- Decomposição de um número racional na soma de um número natural com um número racional representável por uma fração própria;</td></tr>
<tr><td><u>Representação decimal de números racionais não negativos</u>
- Frações decimais; representações na forma de dízimas finitas;
Redução de frações decimais ao mesmo denominador; adição de números racionais representados por frações decimais com denominadores até mil;
- Algoritmos para a adição e para a subtração de números racionais representados por dízimas finitas;
Decomposição decimal de um número racional representado na forma de dízima finita;</td></tr>
</table>

Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico

Tema: "A aprendizagem dos números racionais no ensino- Um estudo básico no 3º ano do 1º ciclo"

Objetivos Gerais:

- Nomear diferentes representações usadas pelos alunos na aprendizagem dos números racionais.
- Identificar as principais dificuldades dos alunos na resolução de tarefas na aprendizagem das diversas representações de número racional.
- Identificar as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de tarefas relativamente às frações equivalentes.
- Caraterizar metodologias que contribuam para a aprendizagem dos números fracionários.

Blocos	Objetivos Específicos	Formulário da entrevista
Bloco I Legitimação da entrevista e motivação do entrevistado	- Legitimar a entrevista -Motivar o entrevistado	-informar o entrevistado sobre a temática e objetivo do trabalho de investigação. - Sublinhar a importância da participação do entrevistado para a realização do estudo. - Desenvolver um clima de confiança e empatia. -Assegurar a confidencialidade e o anonimato das informações prestadas.
Bloco II Perceção da Professora relativamente à turma na aprendizagem dos números racionais	- Caraterização da turma relativamente à aprendizagem dos números racionais.	- É possível dizer-me que tipos de conhecimentos sobre a temática os alunos já tinham ao chegarem ao 3º ano? -Como considera a turma quanto à motivação para a aprendizagem da matemática em geral? E dos números racionais em particular?
Bloco III Perceção da Professora relativamente às várias	-Nomear diferentes representações usadas	- Que tipos de representações os alunos usam quando aprendem os números racionais? -Na sua opinião, este grupo de alunos demonstram

representações usadas na aprendizagem dos números racionais	pelos alunos na aprendizagem dos números racionais.	facilidade na conversão entre as várias representações de número racional?
Bloco IV Perceção da professora relativamente à dificuldade dos alunos na aprendizagem dos números racionais	-Identificar as principais dificuldades dos alunos na resolução de tarefas na aprendizagem nas diversas representações de número racional. - Identificar as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de tarefas relativamente às frações equivalentes.	-É possível falar-me sobre as dificuldades/facilidades sentidas na aprendizagem dos números fracionários e decimais, que tenha observado ao longo da sua experiência profissional nas diferentes representações de número racional? - Através da sua experiência profissional, quais são as maiores dificuldades que observou ao longo dos anos nos alunos, relativamente às diferentes representações dos números racionais? - E relativamente às frações equivalentes quais foram as dificuldades/facilidades sentidas na sua aprendizagem, que tenha observado ao longo da sua experiência profissional?
Bloco V A importância das tarefas e materiais usados na compreensão dos números racionais Metodologias utilizadas na realização das atividades	-Conhecer as metodologias utilizadas na realização de tarefas.	- Existem determinados tipos de tarefas que promovem a aprendizagem deste tema, pode indicar-me algumas? - Nesse tipo de tarefas considera importante o uso de materiais? Pode dar-me exemplos de alguns? -Na sua opinião quais são as metodologias que mais se adequam e utiliza na abordagem aos números racionais? Pode dar-me alguns exemplos. - E relativamente à aprendizagem das frações equivalentes pode dar-me alguns exemplos de metodologias que facilitem a sua aprendizagem?
Bloco VI Complemento da informação	- Dar oportunidade ao entrevistado para acrescentar a informação	- Se considerar pertinente, pode acrescentar alguns aspetos que sejam uteis para o estudo e não tenham sido considerados

Apêndice III - Tabela 3 – *Objetivos específicos do guião de entrevista*

✓ Legitimar a entrevista;
✓ Motivar o entrevistado;
✓ Averiguar a opinião da professora sobre a motivação e as dificuldades sentidas pelos alunos na área da matemática e em particular nos números racionais;
✓ Averiguar a importância das tarefas e materiais na compreensão dos números racionais;
✓ Conhecer as metodologias utilizadas pela docente na realização de tarefas;
✓ Averiguar quais as estratégias utilizadas pelos alunos;
✓ Dar oportunidade ao entrevistado para complementar a informação.

O guião de entrevista contemplava os seguintes blocos:

Bloco I- Legitimação da entrevista e motivação do entrevistado;

Bloco II - Perceção da Professora relativamente à turma na aprendizagem dos números racionais;

Bloco III - Perceção da Professora relativamente às várias representações usadas na aprendizagem dos números racionais;

Bloco IV- Perceção da professora relativamente à dificuldade dos alunos na aprendizagem dos números racionais;

Bloco V- A importância das tarefas e materiais usados na compreensão dos números racionais;

Bloco VI - Complemento da informação

Apêndice IV - Protocolo da entrevista semiestruturada dirigida à Docente Titular

Bloco II- Perceção da Professora relativamente à turma na aprendizagem dos números racionais

1. **É possível dizer-me que tipos de conhecimentos sobre a temática os alunos já tinham ao chegarem ao 3º ano?**
   "Os conhecimentos explorados tendo em conta o programa e os conteúdos sobre a temática oficiais do currículo correspondente ao 2º ano de escolaridade."

2. **Como considera a turma quanto à motivação para a aprendizagem da matemática em geral? E dos números racionais em particular?**
   " A turma apresenta-se de um modo geral, motivada para a abordagem dos conteúdos matemáticos. No que respeita à abordagem dos números racionais, primeiramente a motivação terá de se focar na associação ao real com exemplos concretos."

Bloco III- Perceção da Professora relativamente às várias representações usadas na aprendizagem dos números racionais

1. **Que tipos de representações os alunos usam quando aprendem os números racionais?**
   "Inicialmente, as representações pictóricas e posteriormente a introdução da representação matemática."

2. **Na sua opinião, este grupo de alunos demonstram facilidade na conversão entre as várias representações de número racional?**
   "Como qualquer grupo, denota-se um caráter heterógeno ao nível da aquisição, compreensão e aplicação dos conteúdos, pelo que há alunos que apreendem mais facilmente do que outros."

Bloco IV- Perceção da professora relativamente à dificuldade dos alunos na aprendizagem dos números racionais

1. É possível falar-me sobre as dificuldades/facilidades sentidas na aprendizagem dos números fracionários e decimais, que tenha observado ao longo da sua experiência profissional nas diferentes representações de número racional?

"As dificuldades concentram-se na complexidade abstrata da temática, pelo que a abordagem deverá consistir numa exploração ao nível do operatório concreto."

2. Através da sua experiência profissional, quais são as maiores dificuldades que observou ao longo dos anos nos alunos, relativamente às diferentes representações dos números racionais?

"As dificuldades centram-se na capacidade de compreensão, a temática é abstrata e não corresponde ao nível etário de alguns alunos."

3. E relativamente às frações equivalentes quais foram as dificuldades/facilidades sentidas na sua aprendizagem, que tenha observado ao longo da sua experiência profissional?

" Dificuldades no âmbito da compreensão que condicionam a exploração da temática. A capacidade de abstração dos alunos desta faixa etária, regra geral, não é a necessária para a aquisição e apreensão dos referidos conteúdos."

Bloco V- A importância das tarefas e materiais usados na compreensão dos números racionais; Metodologias utilizadas na realização das atividades

1. Existem determinados tipos de tarefas que promovem a aprendizagem deste tema, pode indicar-me algumas?

"Sim existem, são sobretudo tarefas de associação à vida quotidiana, com recurso ao suporte concretizador."

2. Nesse tipo de tarefas considera importante o uso de materiais? Pode dar-me exemplos de alguns?

" É evidente que o uso de material estruturado facilita a compreensão e realização das tarefas. São exemplos disso a régua graduada, materiais didáticos de suporte à temática e também materiais realizados pelos próprios alunos."

3.Na sua opinião quais são as metodologias que mais se adequam e utiliza na abordagem aos números racionais? Pode dar-me alguns exemplos.

" As metodologias que mais se adequam são de ordem prática e exploratória para a descoberta dos conteúdos, partindo de contextos/problemas do quotidiano."

4. E relativamente à aprendizagem das frações equivalentes pode dar-me alguns exemplos de metodologias que facilitem a sua aprendizagem?

" As metodologias deverão ser igualmente exploratórias e de descoberta, pelo que se deverá fazer uso da manipulação de matérias."

Bloco VI- Complemento da informação

1. **Se considerar pertinente, pode acrescentar alguns aspetos que sejam uteis para o estudo e não tenham sido considerados.**

Apêndice V – Grelha de análise conteúdo

Categoria	Subcategoria	Unidade de registo
Perceção da Professora	Aprendizagem dos números Racionais	P1-*"Os conhecimentos explorados tendo em conta o programa e os conteúdos sobre a temática oficiais do currículo correspondente ao 2º ano de escolaridade."* P2-*" A turma apresenta-se de um modo geral, motivada para a abordagem dos conteúdos matemáticos. No que respeita à abordagem dos números racionais, primeiramente a motivação terá de se focar na associação ao real com exemplos concretos.*
	Representações Número racional	P1-*"Inicialmente, as representações pictóricas e posteriormente a introdução da representação matemática."* P2-*"Como qualquer grupo, denota-se um caráter heterogéneo ao nível da aquisição, compreensão e aplicação dos conteúdos, pelo que há alunos que*

		apreendem mais facilmente do que outros."
	Dificuldades aprendizagem dos números racionais	P1-*"As dificuldades concentram-se na complexidade abstrata da temática, pelo que a abordagem deverá consistir numa exploração ao nível do operatório concreto."* P2-*"As dificuldades centram-se na capacidade de compreensão, a temática é abstrata e não corresponde ao nível etário de alguns alunos."* P3-*" Dificuldades no âmbito da compreensão que condicionam a exploração da temática. A capacidade de abstração dos alunos desta faixa etária, regra geral, não é a necessária para a aquisição e apreensão dos referidos conteúdos."*
	Tarefas números racionais/frações equivalentes	P1- *"Sim existem, são sobretudo tarefas de associação à vida quotidiana, com recurso ao suporte concretizador."* *P4*-" As metodologias deverão ser igualmente exploratórias e de descoberta, pelo que se deverá fazer uso da manipulação de matérias."

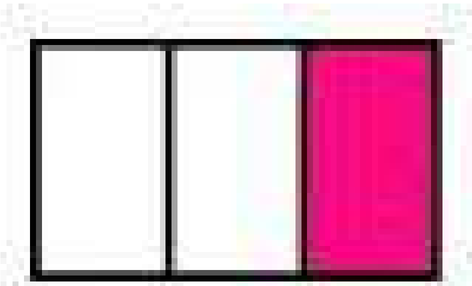
Identificar Metodologias	Materiais	P2- *" É evidente que o uso de material estruturado facilita a compreensão e realização das tarefas. São exemplos disso a régua graduada, materiais didáticos de suporte à temática e também materiais realizados pelos próprios alunos."* P3- *" As metodologias que mais se adequam são de ordem prática e exploratória para a descoberta dos conteúdos, partindo de contextos/problemas do quotidiano."*
Complemento da informação		

Grelha de análise de conteúdo das entrevista semiestruturada

Matemática

Nome:______________________________ Data________

1.A Joana gosta muito de chocolate. Repara que parte do chocolate já comeu.



$\frac{1}{3}$

Na fração $\frac{1}{3}$

O 1 é o ___________________.

O 3 é o ___________________.

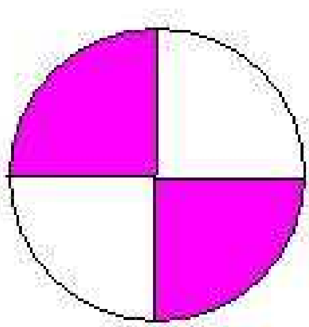
O denominador indica em quantas partes dividiu o chocolate.

O numerador indica quantas partes do chocolate comeu.

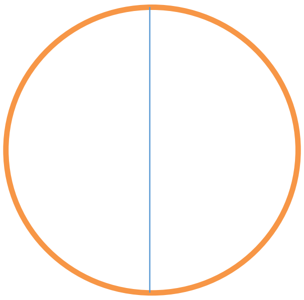
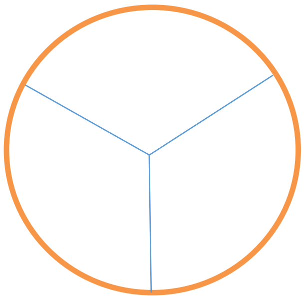
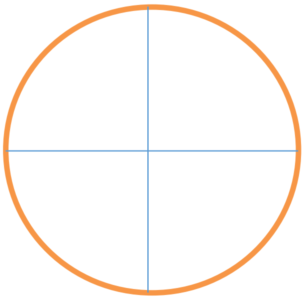
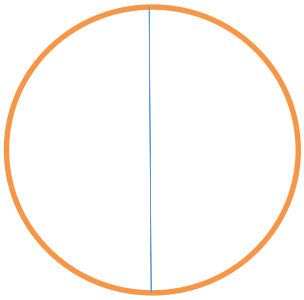
2.Circunda os numeradores de cada fração.

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{2}{4}$$

3. Assinala a fração acima que corresponde ao desenho.



4. Repara nos denominadores das frações e assinala a representação correta, em cada situação apresentada.

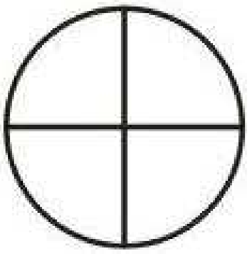
$\frac{1}{2}$		
$\frac{1}{4}$		

5.Pinta de acordo com as indicações.

$\frac{2}{3}$

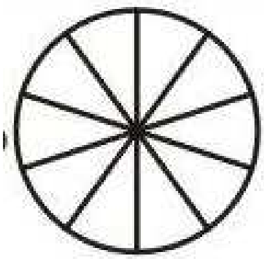
$\frac{3}{3}$

$\frac{1}{3}$



$\frac{3}{4}$

$\frac{1}{5}$



$\frac{1}{10}$

Apêndice VII - Planificação diária 5 jan. 2015

Área	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos Gerais de Aprendizagem	Objetivos Específicos	Designação da Tarefa	Duração (Previsível)
Matemática	Números racionais não negativos Frações	-Reconhecer o numerador e denominador de uma fração -Ler e representar com frações.	▪ Compreender frações com os significados quociente, parte-todo e operador. ▪ Reconstruir a unidade a partir das suas partes.	▪ Teste Avaliação Diagnóstica	▪ 1h00

Estratégias de Condução da Aula	**Introdução**	▪ A professora irá apresentar aos alunos algumas situações em que no dia-a-dia existe a necessidade de se utilizar a representação de números fracionários. A professora fornece indicações para ajudar os alunos a compreender que ½ é o mesmo que metade ou:2 para isso vai recorrer a situações concretas de representação.
	Desenvolvimento	▪ A professora apresenta um cartaz que contém imagens de um bolo inteiro, e explica que é uma unidade. Ao dividir-mos a unidade em partes iguais, cada pedaço é uma fração. ▪ Ao dividir-mos o bolo ao meio estamos a dividir a unidade em 2 partes iguais e representamos do seguinte modo ½. Em seguida, do bolo cortado ao meio, questionar os alunos se: eu ficar com 1 metade do bolo, então qual é a parte que fiquei da unidade? Como se representa sob a forma de fração? Se juntar a minha metade à outra metade do bolo, o que obtemos? Desenvolver a tarefa para 1/3 e para ¼. Distribuir por cada o T.A.D. a professora lê o seu conteúdo em voz alta e esclarece algumas dúvidas de interpretação que possam surgir. Depois pede para os alunos a resolverem individualmente, dando algum tempo para a sua resolução e para que cada um desenvolva estratégias pessoais de resolução da tarefa. **Nota:** Enquanto os alunos resolvem os exercícios a professora deve circular pela sala de forma a auxiliar os alunos caso estes tenham alguma dúvida.
	Discussão	▪ Consoante as observações da professora (enquanto os alunos resolvem o problema), esta pede a alguns alunos que apresentem à professora as suas estratégias de resolução, ou seja, que façam a sua comunicação matemática no lugar para que a investigadora possa perceber como chegaram ao resultado.
Material a utilizar		▪ Fotocópia da folha de tarefa; Lápis
Avaliação		▪ Participação e interesse dos alunos ▪ Capacidade de concentração e realização das tarefas ▪ Raciocínio Matemático ▪ Cálculo Mental

Área	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos Gerais de Aprendizagem	Objetivos Específicos	Designação da Tarefa	Duração (Previsível)
Matemática	**Números racionais não negativos** **Frações**	-Reconhecer o numerador e denominador de uma fração -Ler e representar com frações.	▪ Compreender frações com os significados quociente, parte-todo e operador. ▪ Reconstruir a unidade a partir das suas partes.	▪ Tarefas iniciais	▪ 1h00

Estratégias de Condução da Aula	**Introdução**	▪ A professora apresenta aos alunos a tarefa que costa na ficha de trabalho "Desenhos" e explica que têm de desenhar uma figura que corresponda a cada situação apresentada. A professora fornece indicações para ajudar os alunos a compreenderem a tarefa.
	Desenvolvimento	▪ Distribuir por cada aluno a ficha de trabalho "Desenhos", depois pede para os alunos a resolverem individualmente, dando algum tempo para a sua resolução e para que cada um desenvolva estratégias pessoais de resolução da tarefa. **Nota:** Enquanto os alunos resolvem os exercícios a professora deve circular pela sala de forma a auxiliar os alunos caso estes tenham alguma dúvida.
	Discussão	▪ Consoante as observações da professora (enquanto os alunos resolvem as questões apresentadas), esta pede a alguns alunos que apresentem à turma a sua estratégia de resolução, ou seja, que façam a sua comunicação matemática no quadro para os alunos entre si possam perceber como chegaram ao resultado.
Material a utilizar		▪ Fotocópia da folha de tarefa; Lápis; Folha quadriculada
Avaliação		▪ Participação e interesse dos alunos ▪ Capacidade de concentração e realização das tarefas ▪ Raciocínio Matemático ▪ Cálculo Mental

Apêndice IX - Planificação diária 12 jan.

Área	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos Gerais de Aprendizagem	Objetivos Específicos	Designação da Tarefa	Duração (Previsível)
Matemática	**Números racionais não negativos** **Frações**	-Identificar frações equivalentes. - Comparação e ordenação de frações.	▪ Compreender frações com os significados quociente, parte-todo e operador. ▪ Comparar e ordenar números racionais sob a forma de fração.	▪ **"Tiras e dobras"**	▪ 1h00

Estratégias de Condução da Aula	**Introdução**	▪ A professora irá relembrar os alunos, dando-lhes indicações para os ajudar a compreender que ½ é o mesmo que metade ou:2, para isso vai recorrer a situações concretas de representação (materiais manipuláveis- Círculos divididos em diferentes partes).
	Desenvolvimento	▪ A professora apresenta um cartaz que contém imagens de uma unidade que está divida em diferentes partes. ▪ Ao dividir-mos a unidade ao meio estamos a dividir a unidade em 2 partes iguais e representamos do seguinte modo ½. Em seguida, cada uma das metades foi dividida ao meio, questionar os alunos: e agora, em quantas partes está dividida a unidade? Ficamos com quatro ¼. Explica que ainda podemos repartir essa quantidade em partes ainda mais pequenas, no entanto para ficar-mos com ½ temos de multiplicar a fração por 2, ou seja, ao multiplicar 2 ¼, obtemos 2/8 que é uma fração equivalente a ½. Distribuir por cada aluno a ficha de tarefas "Tiras e dobras", a professora lê o seu conteúdo em voz alta e esclarece algumas dúvidas de interpretação que possam surgir. Depois pede para os alunos a resolverem individualmente, dando algum tempo para a sua resolução e para que cada um desenvolva estratégias pessoais de resolução da tarefa. **Nota:** Enquanto os alunos resolvem os exercícios a professora deve circular pela sala de forma a auxiliar os alunos caso estes tenham alguma dúvida.
	Discussão	▪ Consoante as observações da professora (enquanto os alunos resolvem o problema), esta pede a alguns alunos que apresentem à turma a sua estratégia de resolução, ou seja, que façam a sua comunicação matemática no quadro para os alunos entre si possam perceber como chegaram ao resultado.
Material a utilizar		▪ Fotocópia da folha de tarefa; Lápis de cor; Lápis; Tesoura ▪ Figuras em cartolina
Avaliação		▪ Participação e interesse dos alunos ▪ Capacidade de concentração e realização das tarefas ▪ Raciocínio Matemático ▪ Cálculo Mental

__Apêndice X- Tabela N.º 7 - Objetivos da 1ª sessão__

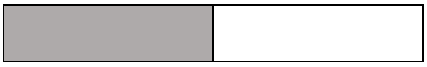
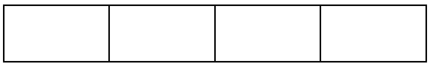
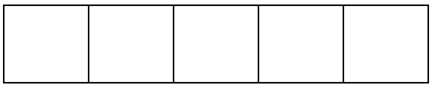
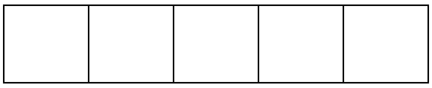
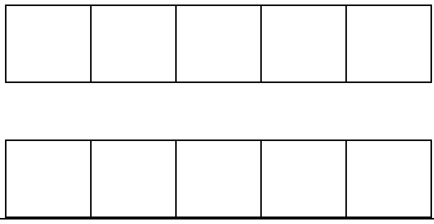
1ªSessão	Tarefas	Objetivos específicos	Material	Tempo
"Desenhos"	Tarefa 1-	- Identificar a unidade e utilizar termos numerador e denominador de uma fração. - Efetuar a leitura de frações	• Folha tarefa	• 60 min.
	Tarefa 2-	-Construir a unidade e representar um dado número de partes. -Relacionar ½ com metade e 0,5	• Folha tarefa; • Folha quadriculada; • Lápis cor vermelho;	
	Tarefa 3-	-Construir a unidade a partir de uma parte da figura apresentada.		

Tabela 7- objetivos 1ª sessão

Matemática- Números Racionais

Nome:____

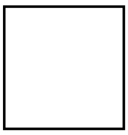
Tarefa 1- Completa a tabela.

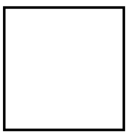
Fração	Representação geométrica	Numerador	Denominador	Leitura
$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{4}$				
$\frac{4}{5}$				
$\frac{5}{5}$				
$\frac{8}{5}$				

Tarefa 2-

Numa folha de papel quadriculado desenha uma figura e divide-a em oito partes iguais. Pinta metade dessa figura a vermelho.

Tarefa 3-

Se  for $\frac{1}{2}$ de uma figura, desenha a figura completa numa folha.

Se  for $\frac{1}{4}$ de uma figura desenha a figura completa numa folha.

Apêndice XII - Sanduiche

Tarefa 4-

A Rita preparou uma sanduíche comprida para o lanche da família. Dividiu a sanduíche em quatro partes iguais. A Rita comeu uma parte e o pai comeu duas partes. Representa o que se passou.

a) Que parte da sanduíche foi comida?

B) Que parte sobrou?

C) Se a Rita, em vez de quatro, tivesse dividido a sanduíche em três partes iguais, o que teria acontecido? Explica o teu raciocínio, podes utilizar desenhos, esquemas, cálculos.

Tarefa 5- Na festa de anos da Maria ofereceram-te um chocolate do qual tu comeste metade. Apareceu depois um amigo que te pediu para lhe dares um bocado. Se quiseres dar metade, da metade que te sobrou ao teu amigo, que parte do chocolate inteiro darás ao teu amigo? Explica e regista o teu raciocínio, podes utilizar desenhos, esquemas, palavras.

Tarefa 6-

6.1-Na mesma festa Havia dois bolos do mesmo tamanho, um era de laranja e o outro de limão. O bolo de laranja foi partilhado igualmente pela Inês, a Ana e pelo Diogo. O bolo de limão foi partilhado igualmente pela Maria, O Tiago, o Rui e pela Joana. Com que parte do bolo ficaram cada uma das crianças?

6.2. Quem comeu mais bolo? Ou comeram todos o mesmo? Apresenta o teu raciocínio, podes utilizar desenhos, esquemas, palavras ou cálculos.

Nome:____

Tarefa 1- Tiras e dobras

Observa as tiras em baixo apresentadas.

Todas elas tem as mesmas dimensões? Então o que representam?

____

____

____

Pinta cada uma das tiras com as seguintes cores:

- A primeira tira fica branca.
- Pinta a segunda tira de azul claro.
- Pinta a terceira tira de amarelo.
- Pinta a quarta tira de verde.
- Pinta a quinta tira de cor-de-rosa.
- Pinta a sexta tira de roxo.
- Pinta a sétima tira de vermelho.

Depois de teres pintando cada uma das tiras de cor diferente, recorta-as pelas margens.

Em seguida, dobra cada uma das tiras do seguinte modo:

- A tira branca não necessita de dobrar, fica inteira.
- Dobra a tira azul clara, de modo a encontrares duas partes iguais.
- Dobra a tira amarela, de modo a encontrares três partes iguais.
- Dobra a tira verde, de modo a encontrares quatro partes iguais.
- Dobra a tira rosa, de modo a encontrares seis partes iguais.
- Dobra a tira roxa, de modo a encontrares oito partes iguais.
- Dobra a tira vermelha, de modo a encontrares doze partes iguais.

Assinala em cada uma das tiras, cada uma das partes obtidas com a fração que a representa.

Repara que uma parte amarela pode ser trocada, por exemplo, por duas partes rosas, mantendo cada uma das tiras o seu tamanho original.

a) Consegues encontrar outras trocas justas entre as tiras? Registas as tuas investigações e explica o teu raciocínio.

b)Tendo em atenção os resultados da questão anterior, indica outras frações equivalentes.

Matemática- Números Racionais

Nome:____

Tarefa 1-

1.1 Para o aniversário da Luísa a mãe fez dois bolos e dividiu cada um em dez fatias iguais. Cada fatia que parte é de um bolo?

1.2 E cinco fatias, a que parte correspondem de um bolo?

1.3 O que representa a fração $\frac{10}{10}$?

1.4 E o que representa a fração $\frac{20}{10}$? E a fração $\frac{20}{2}$?

Tarefa 2-

2.1 O Tiago coleciona berlindes. Quando tinha 6 berlindes perdeu dois sextos dos berlindes. Quantos berlindes perdeu?

Apresenta o processo que utilizaste para resolver a questão. Podes utilizar palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

2.2 O amigo do Tiago tinha 12 berlindes e deu 9 ao Tiago. Que fração dos seus berlindes deu ao Tiago?

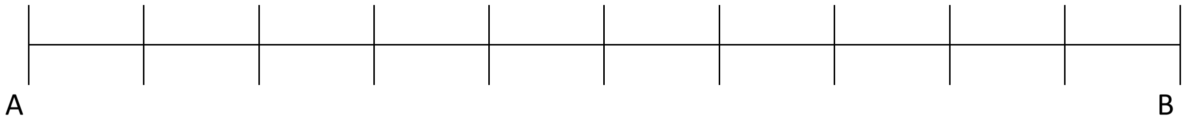
Apresenta o processo que utilizaste para resolver a questão. Podes utilizar palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

Tarefa 3 –

3.1 A turma do Ricardo organizou um percurso pedestre no parque da fonte nova, representado na figura por [AB].

A Maria parou para descansar depois de ter feito $\frac{2}{5}$ do percurso, a Joana parou ao fim de $\frac{4}{10}$, o Francisco ao fim de $\frac{3}{5}$ e os restantes elementos da turma ao fim de $\frac{7}{10}$ do percurso.

Assinala no segmento [AB] abaixo traçado, o ponto que corresponde a cada uma das paragens referidas.



3.2 Sabendo que o percurso era de 10 Km, quantos quilómetros tinham sido feitos pela Maria quando parou para descansar? E pela Joana?

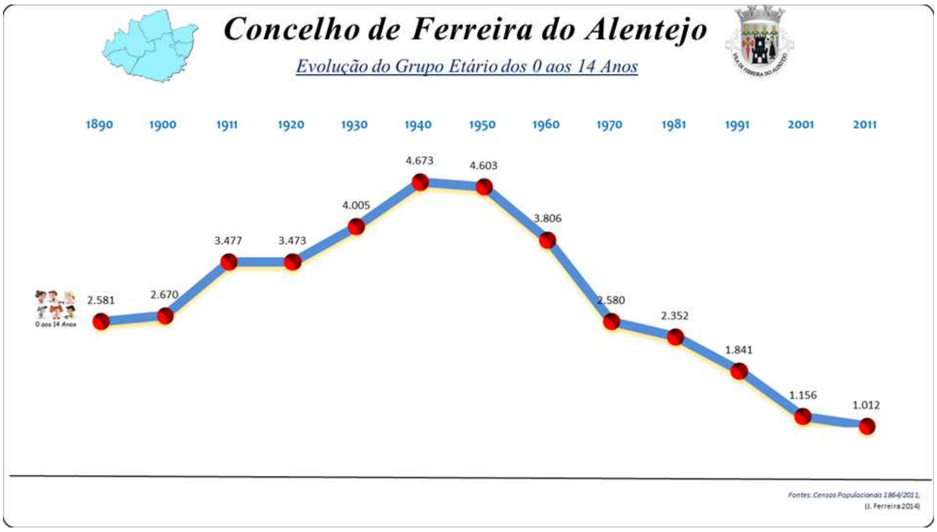
Que podes concluir acerca do percurso feito pelas duas amigas quando pararam para descansar? Justifica a tua resposta.

Anexos

Anexo 1- Caracterização da Escola

A Escola Básica de Ferreira do Alentejo, onde foi realizada esta investigação, pertence ao Agrupamento vertical de Escolas de Ferreira do Alentejo, que se encontra situado na vila de Ferreira do Alentejo que é sede de concelho, e pertence ao distrito de Beja. A freguesia de Ferreira do Alentejo tem cerca de 3700 habitantes de acordo com os dados publicados pelo Instituto Nacional de Estatística, 2013. p. 31.

De acordo com a mesma fonte, e como se pode verificar através do gráfico em baixo apresentado, pela própria autarquia, a partir da década de 1950 a taxa da população jovem no concelho de Ferreira do Alentejo tem vindo a decrescer a um ritmo acelerado, atingindo os valores mínimos no ano de 2011.



No que diz respeito à localização da Escola Básica de Ferreira do Alentejo, o espaço físico onde esta se situa é composto por quatro escolas, nas quais também estão inseridas as salas de Educação Pré-Escolar, encontram-se juntas no mesmo recinto, este é composto por um parque infantil que se encontra devidamente vedado. Neste espaço todas as crianças podem estar para brincar, pois os intervalos não coincidem, ou seja o 1º ciclo tem pausas diferenciados em relação à Educação Pré-escolar, assim os mais pequenos podem brincar mais tranquilamente e os maiores também tem oportunidade de utilizarem este espaço, que é por eles também bastante procurado. Todo o espaço exterior é composto por árvores, dois bebedouros de água, ecopontos, vários baldes de lixo indiferenciado e diversos bancos de madeira que se encontram distribuídos pelo espaço para os alunos poderem lanchar e descansar. No recreio as crianças podem brincar livremente pois este é sempre visionado pelas funcionárias e também pelas docentes. É de salientar que durante as horas de intervalo existe sempre uma funcionária que está na porta principal da escola, impedindo assim os alunos de sair do recinto e controlando que entra.

No espaço exterior da escola também existe um parque onde existem diversos materiais de entretimento tais como: escorrega, balancé, bolas, jogos, entre outros, que estão à responsabilidade das Assistentes Operacionais. Também existe um campo de jogos, onde se realizam aulas de Expressão Motora e que durante os intervalos os alunos também o utilizam nas suas brincadeiras e jogos. No entanto, torna-se importante salientar que neste espaço não existe uma zona coberta onde os alunos se possam abrigar em dias de chuva e nestes casos, o intervalo é realizado no átrio de cada uma das escolas que existem neste recinto.

A sala de aula é ampla, possui ar condicionado, várias janelas que permitem a entrada de luz na sala, e uma boa iluminação, evitando assim que os alunos realizem qualquer tipo de esforços para observar o que se encontra no quadro. Podemos encontrar também três armários, no primeiro, no seu interior podemos encontrar os processos dos alunos com as suas respetivas avaliações ao longo de todos os períodos. No segundo armário podemos encontrar, os manuais escolares dos alunos os dossiês onde estão guardadas as fichas de trabalho e cadernos dos mesmos.

No terceiro armário, podemos encontrar material de trabalho para a área da Expressões, nomeadamente plástica e musical, onde se encontra material de desgaste rápido, como blocos de cartolinas, colas, tintas e existe também uma bolsa com vários instrumentos musicais, alguns são de madeira outros são de plástico. Também existe algum material estruturado relativamente à área de Estudo do Meio, como o modelo do corpo humano, um globo terrestre, um modelo que mostra como funciona o coração humano. O material de trabalho para a área da matemática, como por exemplo, maletas com barras de *cuisenaire*, material multibásico, blocos lógicos, encontra-se devidamente exposto e acessível aos alunos numa mesa de apoio. Podemos ainda encontrar um placar ao fundo da sala onde estão afixados alguns trabalhos dos alunos. À entrada existe outro placar onde estão afixados decretos-lei, o horário semanal, e a programação anual dos conteúdos: de Português, Estudo do Meio, Matemática e Expressões. Em relação ao quadro, existe um quadro branco, não existe quadros interativos. Por cima do quadro podemos observar cartões o alfabeto. Estes cartões são caracterizados como tento uma imagem, o nome do que está representado na imagem e a letra em questão representada em manuscrito e em letra de forma.

Ao fundo da sala existia uma secretária que tem um computador fixo com acesso à internet, este é utilizado pela docente, que o utiliza para realizar algum tipo de pesquisa ou para realizar algum trabalho ou fichas para os alunos. O computador é utilizado também como auxilio na apresentação de PowerPoint, visionamento de um filme ou audição de uma música ou leitura modelo de uma história a trabalhar. Os alunos também o utilizam, sobretudo em trabalhos de pesquisa orientada, em que selecionam e recolhem informação para posteriormente elaborarem os seus textos.

A mesa da docente situava-se no lado direito da sala junto ao quadro, é uma mesa igual à dos alunos, que serve de apoio ao longo do dia.

Anexo 2- Caraterização dos alunos

A turma do 3º ano é composta por 20 alunos, 12 rapazes e 8 raparigas, a maioria dos alunos estava a completar os 9 anos, mas alguns já tinham 10 anos e um aluno já tinha 14 anos, como se pode confirmar no gráfico em baixo.

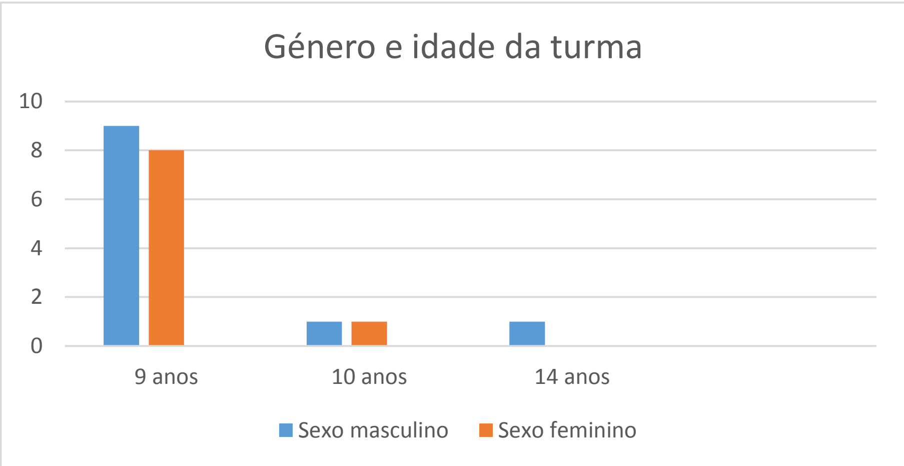


Gráfico N.º1- Género e idade da turma

Assim, os alunos iniciaram o 1º ciclo seguindo o programa de matemática de 2007, exceto um, que iniciou o seu percurso escolar no seu país de origem que é a Roménia.

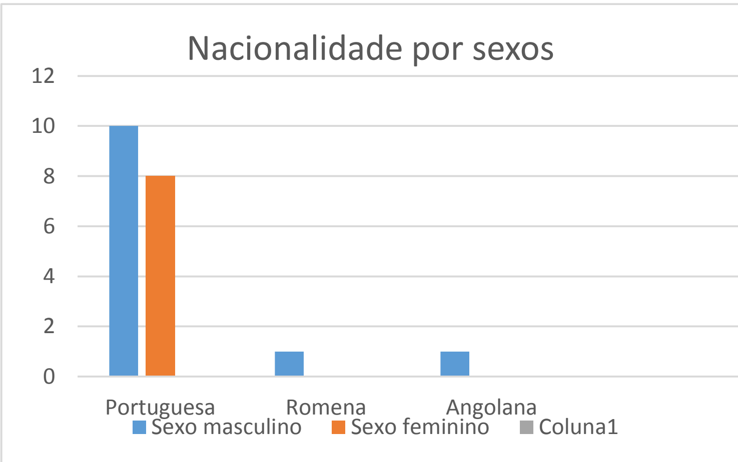


Gráfico N.º 2- Nacionalidade por sexos

Na generalidade a turma revela bom comportamento e bom relacionamento entre pares, a nível das aprendizagens existem alguns alunos com dificuldades não sendo exclusivas na área da matemática, alguns deles tem P.D.I. Dois dos alunos já ficaram retidos em anos anteriores, um no 3º ano e outro no 2º ano, um deles foi integrado no inicio deste ano letivo nesta turma, o outro foi integrado no ano anterior.

A maior parte dos alunos tem acesso a computador pessoal em casa, e tem acompanhamento na realização dos trabalhos de casa.

No que diz respeito às habilitações literárias dos pais dos alunos, como se pode verificar através do gráfico seguinte, existe uma grande variabilidade, existindo uma ligeira incidência de pais com o ensino secundário, em oposição aos que tem o 1º ciclo e os que são licenciados.

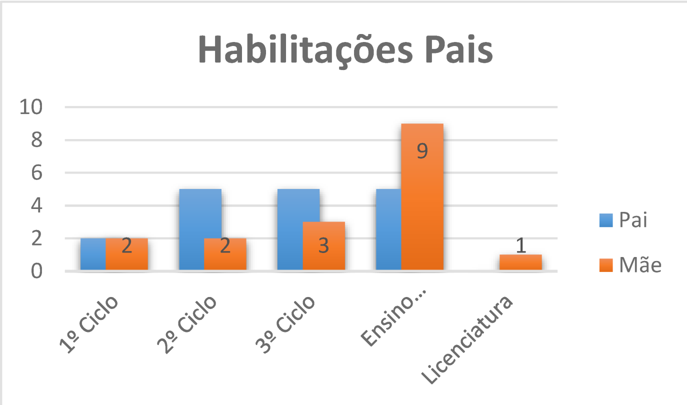


Gráfico N.º 3- Habilitações literárias dos pais

Relativamente às habilitações literárias dos pais dos alunos e através do gráfico anterior, é possível verificar que existe uma grande variedade, com maior incidência para o ensino secundário (5 pais e 9 mães). No entanto também é possível observar que 4 pessoas (2 pais e 2 mães) possuem o 1º ciclo, 7 pessoas (5 pais e 2 mães) têm o 2º Ciclo, 8 pessoas (5 pais e 3 mães) possuem o 3º ciclo e apenas 1 mãe detêm uma licenciatura.

A maioria dos alunos pertence a um nível socioeconómico médio/baixo. Sensivelmente metade dos alunos tem os seus familiares desempregados e quando têm algum trabalho é na maioria dos casos precário, sobretudo sazonal na agricultura. Os seus meios de sustentabilidade são muitas vezes o subsídio de desemprego, o Subsídio Social de Inserção e apoio de alguns familiares, só a minoria tem trabalho fixo, e é de onde as suas fontes de rendimento provém, sobretudo na área do comércio e serviços.

A tabela seguinte ilustra a situação profissional dos pais dos alunos em estudo.

Aluno N.º	Situação profissional	
	Pai	**Mãe**
1	GNR	Empregada de balcão
2	-	Empresária
3	Gasolineiro	Manicure
4	Desempregado	Estudante
5	Desempregado	Desempregada
6	Funcionário Judicial	Assistente Técnica
7	Trabalhador Agrícola	Desempregada
8	Empresário Comercial	Assistente Operacional
9	Pintor automóvel	Doméstica
10	Desempregado	Op. Especializada
11	Caseiro	-
12	Desempregado	Desempregada
13	Trabalhador agrícola	Trabalhadora agrícola
14	Comerciante	Doméstica
15	Aux. Técnico Rega	Ajudante de Ação Educativa
16	Operador de Máquinas	Responsável Turno (supervisão)
17	Eletricista	Trabalhadora Rural

Com base nos dados fornecidos pela professora titular sobre a caracterização da turma e daquilo que foi possível observar durante a Prática de Ensino Supervisionada em Ensino do 1º ciclo do Ensino Básico, podemos referir que na generalidade, o relacionamento sócio afetivo que se verifica nesta turma é bastante positivo, embora existam alguns casos pontuais entre os alunos, nomeadamente de situações de agressões entre pares, principalmente entre um aluno do sexo masculino e alguns elementos do sexo feminino.

Foi possível verificar que a maioria dos alunos brincam em conjunto com os colegas da turma mas também o fazem com colegas de outras turmas, no caso de acontecer alguma discussão com alguma outra criança, que não seja da sua turma, todos se juntam em defesa do seu colega e pedem de imediato ajuda a um adulto.

Sendo a família que propícia a construção dos laços afetivos e a satisfação das necessidades no desenvolvimento da pessoa, desempenhando um papel decisivo na socialização e na educação, também é na família que são absorvidos os primeiros saberes, e onde se aprofundam os vínculos humanos. A falta, ou escassez, de relações familiares adequadas, devido ao pouco tempo de convívio, ou desajustamentos pessoais são marcadamente vincadas em grande parte dos alunos da turma.

Assim, na generalidade da turma, os alunos com piores comportamentos e com piores resultados escolares são oriundos deste meio sociocultural desfavorecido, famílias desestruturadas e cujos pais/encarregados de educação não se envolvem efetivamente no processo ensino/aprendizagem.

No que se refere aos comportamentos, os alunos são bastante ativos, na maioria das vezes apresentam dificuldade em colocar o dedo no ar sempre que pretendem intervir, apresentando, por vezes, atitudes inadequadas entre si, como por exemplo, levantar-se sem razão aparente, falta de respeito pelos colegas, entre outras.

A nível de aprendizagens, a turma é bastante heterogénea, pois a maioria da turma consegue atingir os objetivos definidos, ao invés de alguns alunos, que revelavam grandes dificuldades de aprendizagem a qual é transversal a todas as áreas. Consideramos que estas dificuldades são evidentes, pois os alunos revelaram muita dificuldade em prestar atenção à explicação e, posteriormente, na realização das atividades de forma autónoma, ficando sempre á espera que estas fossem resolvidas no quadro ou oralmente em grande grupo.

No que diz respeito à relação professora/aluno, a docente assume importante papel na sala de aula, motivando os alunos a procurarem e a quererem saber mais. Uma vez que a motivação está ligada a desafios, a professora assume, papel de extrema importância, pois trabalha como orientadora na busca da motivação de cada aluno e na busca da motivação do grupo, promovendo experiências nas quais os alunos possam vislumbrar valores que não são ensinados, mas podem ser descobertos por meio de certas experiências como, por exemplo, apreciar uma música ou ler um livro. A professora titular tem o papel de orientação e ajuda com o objetivo de possibilitar aos alunos a aprendizagem de determinados conteúdos e desempenha papel fundamental na organização de atividades e na formulação de situações que propiciem aos alunos oportunidades de aprendizagem de forma significativa.

Do ponto de vista afetivo, a docente tenta incutir confiança nos alunos, poder intelectual e um modelo a seguir, além da consequente motivação do desejo de saber e do despertar de valores. Torna-se bastante relevante para as crianças o que é dito sobre elas, os elogios que lhes são concedidos e a atenção às suas dificuldades, constituindo estas as formas da professora manifestar interesse pelo seu desenvolvimento, criando assim com elas grandes laços afetivos.

Anexo 3- Frações Equivalentes

Barras de *Cuisinaire**

Nome do grupo:____

Tarefa 1- Se considerares como unidade a barra laranja, qual é a barra que representa $\frac{4}{5}$ da unidade? E que fração da unidade representa a barra vermelha? Descreve o processo que utilizaste para responder à questão. Podes utilizar palavras, desenhos, esquemas ou cálculos.

Tarefa 2- Considera agora como unidade a barra amarela. Qual é a barra que representa $\frac{4}{5}$ da unidade? E que fração representa a barra vermelha? Descreve o processo que utilizaste para responder à questão.

Tarefa 3- se a barra verde-claro representar $\frac{3}{4}$, qual é a barra que representa a unidade? E qual é a barra que representa $\frac{1}{2}$? Descreve o processo que utilizaste para responder à questão.

***retirado da brochura "Desenvolvendo o sentido de número racional"**